ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ СОБЕСЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ С ВЫПУСКНИКАМИ КОЛЛЕДЖЕЙ В 2009 ГОДУ

В 2009 году в соответствии с правилами приема в ГОУ ВПО «Ивановский государственный энергетический университет» абитуриенты, имеющие среднее профессиональное образование, при поступлении на бакалавриат или специальности с сокращенной программой подготовки соответствующего профиля, имели право проходить вступительные испытания по математике в форме собеседования. На собеседовании каждому абитуриенту предлагались по две задачи из различных разделов математики, соответствующих программе, разработанной Министерством образования и науки РФ.

В качестве примеров приведем некоторые задания с решениями и методическими указаниями и предложим тренировочные задания с ответами из нескольких разделов математики. Все задания предназначены абитуриентам, закончившим средние профессиональные учебные заведения и поступающим на специальности соответствующего профиля для обучения по сокращенной программе.

1. Алгебраические уравнения и системы уравнений

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{5-x}\left(x^2-10x+21\right)=0$.

Решение. Заметим, что решение уравнения сводится к использованию условия равенства произведения нулю. При этом важно не забыть проверить, определен ли первый множитель при тех значениях переменной *x*, при которых второй множитель обращается в ноль.

Заданное уравнение равносильно совокупности уравнения и системы

$$\sqrt{5-x}=0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2-10x+21=0, \\ 5-x\ge 0. \end{cases}$$

Решение первого уравнения: $x=5$. Решения квадратного уравнения: $x_1=3,\ x_2=7$, но, учитывая условие $x\le 5$, в ответ войдет лишь значение $x=3$.

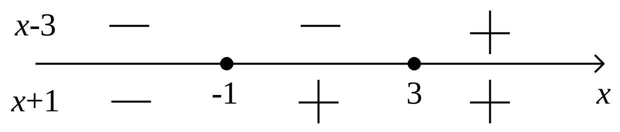
Ответ: 3; 5.

Пример 2. Решите уравнение $|x-3|+2|x+1|=4$.

Решение. Напомним определение модуля

$$|a|=\begin{cases} a, & a\ge 0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

Найдем интервалы знакопостоянства подмодульных выражений $x-3$ и $x+1$.



Тогда заданное неравенство равносильно совокупности трех систем:

$$1.\ \begin{cases} x<-1, \\ -(x-3)-2(x+1)=4, \end{cases} \quad \text{или} \quad 2.\ \begin{cases} -1\le x<3, \\ -(x-3)+2(x+1)=4, \end{cases} \quad \text{или} \quad 3.\ \begin{cases} x\ge 3, \\ x-3+2(x+1)=4. \end{cases}$$

Решив уравнение, входящее в первую систему, найдем $x=-1$. Но это решение не удовлетворяет условию $x<-1$, и, значит, не является решением исходного уравнения. Решением второй системы будет $x=-1$. Решением уравнения в третьей системе является $x=\dfrac{5}{3}$, которое также не удовлетворяет условию $x\ge 3$.

Ответ: -1.

Решите самостоятельно

1. Решите уравнение $\dfrac{x-1}{x+3}+2=\dfrac{3(x+3)}{x-1}$.

2. Решите уравнение $\dfrac{6x+12}{x^2+x-2}=x$.

3. Решите уравнение $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=\sqrt{x-2}$.

4. Решите уравнение $\dfrac{8}{\sqrt{10+x}}-\sqrt{10+x}=2$.

5. Решите уравнение $\left|x^2-6x+4\right|=4$.

6. Решите уравнение $\left|3x-6\right|=6-3x$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1, \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=3. \end{cases}$

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ x+y=5. \end{cases}$

Ответы: **1.** -2. **2.** 3. **3.** 3. **4.** -6. **5.** 0; 2; 4; 6. **6.** $x\in(-\infty;2]$. **7.** (0,5;1). **8.** (1;4); (4;1).

2. Неравенства и системы неравенств

Пример 1. Решите неравенство $\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}\le 2$.

Решение. При решении неравенства воспользуемся методом интервалов. Заданное неравенство равносильно следующему

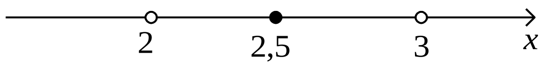
$$\frac{x-3}{x^2-5x+6}-2\le 0 \Leftrightarrow \frac{x-3-2x^2+10x-12}{x^2-5x+6}\le 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+11x-15}{x^2-5x+6}\le 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{-2x^2+11x-15}{x^2-5x+6}$.

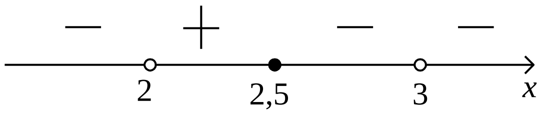
Найдем область определения функции: $D(f)$: $x^2-5x+6\ne 0 \Leftrightarrow x_1\ne 2$ и $x_2\ne 3$, т.е. $D(f)=(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$.

Найдем нули функции $f(x)$: $-2x^2+11x-15=0 \Leftrightarrow x_1=2,5$ или $x_2=3$.

Отметим на координатной прямой все найденные значения *x*:



Разложим числитель и знаменатель дроби на множители $f(x)=\dfrac{-2(x-2,5)(x-3)}{(x-2)(x-3)}$ и на каждом из получившихся промежутков определим знак функции $f(x)$: $f(0)<0$, $f(2,3)>0$, $f(2,7)<0$, $f(4)<0$.



Таким образом, дробь принимает неположительные значения при $x \in (-\infty; 2) \cup [2,5; 3) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 2) \cup [2,5; 3) \cup (3; +\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $x^2 - 2|x| < 3$.

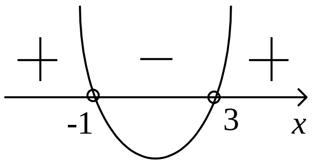
Решение. Учитывая определение модуля, данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$1.\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 2x - 3 < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad 2.\ \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 2x - 3 < 0. \end{cases}$$

Решим каждое из квадратных неравенств, входящих в системы.

1. $x^2 - 2x - 3 < 0$.

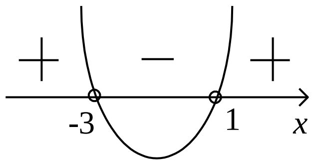
$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ или $x_2 = 3$



$x \in (-1; 3)$.

2. $x^2 + 2x - 3 < 0$.

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3$ или $x_2 = 1$



$x \in (-3; 1)$.

Учитывая, что в первой системе $x \geq 0$, ее решением является промежуток $x \in [0; 3)$. Во второй системе $x < 0$, следовательно, ее решение $x \in (-3; 0)$.

Объединяя полученные множества решений двух систем, найдем множество решений заданного неравенства.

Ответ. $(-3; 3)$.

Решите самостоятельно

1. Решите систему неравенств $\begin{cases} (x+1)(x-5) \leq 0, \\ 3 - \dfrac{3}{2}x > \dfrac{5}{8} - \dfrac{4x-3}{6}. \end{cases}$

2. Решите неравенство $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x + 8} \leq 0$.

3. Решите неравенство $\dfrac{(4-x)(2x-2)}{x(x+5)^2} \leq 0$.

4. Решите неравенство $\dfrac{1}{x^2 - x} + 1 > \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1}$.

5. Решите неравенство $|2x - 3| < 4$.

6. Решите неравенство $|x + 2| + |x - 3| > x + 5$.

7. Решите неравенство $\sqrt{3x - 5} > \sqrt{x - 4}$.

Ответы: **1.** $x \in [-1; 2,25)$. **2.** $x \in [-1; 2) \cup [3; 4)$. **3.** $x \in (0; 1] \cup [4; +\infty)$. **4.** $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. **5.** $x \in (-0,5; 3,5)$. **6.** $x \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$. **7.** $x \in [4; +\infty)$.

3. Преобразование тригонометрических выражений. Тригонометрические уравнения

Пример 1. Найдите $\sin\alpha$, если $tg\alpha=\frac{4}{3}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Решение. Для вычисления значения $\sin\alpha$ воспользуемся формулами

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \text{ и } 1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

По второй формуле получим $\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$, откуда $\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$. Тогда по основному тригонометрическому тождеству $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$. По условию $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, т.е. угол α расположен в первой четверти, где $\sin\alpha<0$, следовательно, $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$.

Ответ. $-0,8$.

Пример 2. Решите уравнение $5-2\cos^2 x=7\sin x$.

Решение. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ и сведем уравнение к квадратному.

$$5-2\left(1-\sin^2 x\right)=7\sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x-7\sin x+3=0.$$

Используя замену переменных $\sin x=t$, где $t\in\left[-1;1\right]$, получим уравнение

$$2t^2-7t+3=0 \Leftrightarrow t_1=3 \text{ или } t_2=\frac{1}{2}.$$

Так как $t\in\left[-1;1\right]$, то первый корень посторонний. Таким образом,

$$\sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\left(-1\right)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z.$$

Ответ. $\left(-1\right)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$.

Решите самостоятельно

1. Вычислите $\frac{8\sin 10^0\cdot\cos 10^0\cdot\cos 20^0}{\cos 50^0}$.

2. Упростите выражение $\frac{2\cos^2\alpha-1}{2ctg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$.

3. Решите уравнение $4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}-\sqrt{3}=0$.

4. Решите уравнение $\cos 2x+1=\cos x$.

5. Решите уравнение $2\sin^2 x=3\sin x\cos x+5\cos^2 x$.

6. Решите уравнение $tg^2x\cdot\sin x+3=3\sin x+tg^2x$.

Ответы: **1.** 2. **2.** 1. **3.** $\left(-1\right)^n\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. **4.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. **5.** $arctg 2,5+\pi n$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **6.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$.

4. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

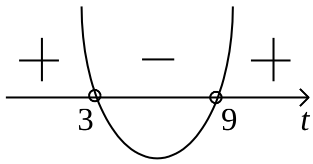
Пример 1. Решите неравенство $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 < 0$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 < 0$. Для его решения воспользуемся методом замены переменных. Обозначим $3^x = t$, где $t > 0$. Тогда заданное неравенство сведется к квадратному

$$t^2 - 12t + 27 < 0.$$

$$t^2 - 12t + 27 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 3 \text{ или } t_2 = 9.$$

$$t \in (3;9).$$



Откуда получаем, что $3 < t < 9$, т.е. $3 < 3^x < 9$, следовательно, $1 < x < 2$.

Ответ. $(1;2)$.

Пример 2. Решите уравнение $\lg\left(x^2 - x\right) - \lg(10 + 2x) = 0$.

Решение. При решении логарифмических уравнений и неравенств необходимо следить за равносильностью преобразований или учитывать область определения логарифмической функции. Перепишем уравнение в виде $\lg\left(x^2 - x\right) = \lg(10 + 2x)$. Тогда, учитывая область определения логарифмов, это уравнение будет равносильно следующей системе

$$\begin{cases} x^2 - x = 10 + 2x, \\ 10 + 2x > 0, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x^2 - 3x - 10 = 0, \\ x > -5. \end{cases}$$

Так как решения квадратного уравнения, $x_1 = -2, x_2 = 5$, удовлетворяют условию $x > -5$, то оба числа являются решениями заданного уравнения.

Ответ. -2; 5.

Решите самостоятельно

1. Вычислите $\log_5 28 - \frac{3}{2}\log_5 \sqrt[3]{49} + 2\log_5 0{,}1$.

2. Решите уравнение $\sqrt[3]{25^x} \cdot (0{,}2)^{x+2} = 1$.

3. Решите уравнение $2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3^x = 9$.

4. Решите уравнение $5^{\log_5 3} = \log_2\left(x^2 + 2x\right)$.

5. Решите уравнение $\left(x^2 - 49\right)\log_5(6 - x) = 0$.

6. Решите неравенство $3^{\frac{x+3}{x-3}} \geq \frac{1}{81}$.

7. Решите неравенство $2^{x+3} + 3 \cdot 5^x < 3 \cdot 2^x + 5^{x+1}$.

8. Решите неравенство $\log_2 \frac{x+1}{x} > 1$.

9. Решите неравенство $\log_2 x + \log_2(x - 1) \leq \log_2(x + 15)$.

Ответы: **1.** -2. **2.** -6. **3.** 1. **4.** -4; 2. **5.** -7; 5. **6.** $x \in \left(-\infty; \frac{9}{5}\right] \cup (3; +\infty)$. **7.** $x \in (1; +\infty)$. **8.** $x \in (0;1)$. **9.** $x \in (1;5]$.