© «Вестник ИГЭУ» Вып. 4 2008 г.

УДК 511.6

ОБ ОДНОМ ДИОФАНТОВОМ УРАВНЕНИИ

АВАНЕСОВ Э.Т., ГУСЕВ В.А., кандидаты физ.-мат. наук

Показана невозможность решения известной десятой проблемы Гильберта с помощью соответствующей системы диофантовых уравнений.

Ключевые слова: арифметические характеристики поля, решения диофантова уравнения, десятая проблема Гильберта.

ABOUT A DIOPHANTINE EQUATION

E.T. AVANESOV, V.A. GUSEV, Candidates of Physics and Mathematics

The authors represent impossibility of solution to the famous Hilbert's tenth problem by means of appropriate system of Diophantine equations.

Key words: field arithmetic characteristics, solutions of diophantine equations, Hilbert tenth problem.

В своей знаменитой лекции о математических проблемах, произнесенной на 2-м Международном Конгрессе математиков (Париж, 1900), Гильберт [1] сформулировал следующую проблему:

«… 10. Решение проблемы разрешимости для произвольного диофантова уравнения.

Пусть задано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и с целыми рациональным коэффициентами; требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет данное уравнение решение в целых рациональных числах или нет».

В работе [2] Дэвис, опираясь на известный результат Дж. Робинсон [3], доказал следующее предложение.

Теорема 1. Если диофантово уравнение

$$9(x^2+7y^2)^2-7(u^2+7v^2)^2=2 \qquad (1)$$

не имеет нетривиальных решений (т. е. решений, отличных от $x = \pm 1$, $y = 0$; $u = \pm 1$, $v = 0$), то 10 проблема Гильберта неразрешима в смысле рекурсивной теории чисел.

Заметим, что наличие нетривиального решения диофантова уравнения (1) не влечет никакого вывода о разрешимости (или неразрешимости) 10-й проблемы, а лишь устанавливает факт невозможности исследования проблемы на таком пути.

Теорема 2. Диофантово уравнение (1) имеет нетривиальное решение.

Доказательство. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A &= x^2+7y^2, \\ B &= u^2+7v^2. \end{aligned} \qquad (2)$$

Тогда диофантово уравнение (1) эквивалентно системе диофантовых уравнений (1) и

$$(3A)^2-7B^2=2. \qquad (3)$$

Очевидно уравнение (3) означает, что элемент $\alpha = 3A + B\sqrt{7}$ квадратичного поля $K\left(\sqrt{7}\right)$ имеет норму $Norm\alpha = 2$. Далее мы используем следующие арифметические характеристики поля $K\left(\sqrt{7}\right)$:

1) число классов идеалов равно $h = 1$;
2) основная единица есть $\varepsilon = 8+3\sqrt{7}$, причем $Norm\varepsilon = \pm 1$;
3) простой расчет по mod3 показывает, что рациональная часть всякого целого числа поля с нормой 2 делится на 3;
4) существует лишь один класс ассоциированных чисел нормы 2, а в качестве его представителя можно взять число $\mu = 3+\sqrt{7}$.

Таким образом, каждое целое число $K\left(\sqrt{7}\right)$ с нормой два имеет вид

$$\alpha = \pm\mu\varepsilon^n = \pm\left(3+\sqrt{7}\right)\left(8+3\sqrt{7}\right)^n, \text{ число } n \ge 0.$$

Наконец, из (2) заключаем, что $A, B \ge 0$, а потому все целые неотрицательные решения диофантова уравнения (3) задаются по формуле

$$3A_n + B_n\sqrt{7} = \left(3+\sqrt{7}\right)\left(8+3\sqrt{7}\right)^n, \ n \ge 0.$$

Переход к матрицам второго порядка приводит к соотношению

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

из которого получаем искомые рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 8A_n + 7B_n, \\ B_{n+1} &= 9A_n + 8B_n, \\ A_0 &= B_0 = 1. \end{aligned} \qquad (4)$$

Проведенный компьютерный расчет до $n = 26$ показывает, что
$A_0 = 1$, B0 = 1; A1 = 15, B1 = 17;
$A_2 = 239$, B2 = 271; A3 = 3809, B3 = 4319;
$A_6 = 15418831$, B6 = 17483311;
$A_{26} = 172314290896246141664708621182959$,
$B_{26} = 195386040451675061180978695111631$.

Чтобы установить факт простоты чисел A_{26} и B_{26} или разложить их на множители, необходимо разложить на множители $A_{26} - 1$ и $B_{26} - 1$.

Легко определяем:

$$A_{26}-1=2\cdot 7\cdot 17\cdot 131\cdot 4049\cdot 117701\cdot 159839\times$$
$$\times 414991\cdot 17483311,$$
$$B_{26}-1=2\cdot 3^5\cdot 5\cdot 19\cdot 71\cdot 131\cdot 117701\times$$
$$\times 17483311\cdot 22110582149,$$

где последние множители также простые числа.

Существование первообразных корней порядков A_{26} – 1 и B_{26} – 1 по modA_{26} и, соответственно, B_{26} приводит, согласно известной теореме Лемера [4], к простоте чисел A_{26} и B_{26}.

С другой стороны, непосредственно обнаруживается, что числа A_{26} и B_{26} – квадратичные вычеты по mod7.

Остается использовать следующее элементарное предложение: нечетное число N представимо формой x^2 + $7y^2$ тогда и только тогда, когда каждый простой делитель, входящий в каноническое разложение N в нечетной степени, есть квадратичный вычет по mod7.

Таким образом, диофантовы уравнения (2)–(3) разрешимы, а значит, существует нетривиальное решение уравнения (1) и теорема 2 доказана.

Замечание 1. Впервые отрицательное решение 10-й проблемы Гильберта получено Ю. Матиясевичем [5]. Ввиду этого, описанные результаты и методы имеют лишь самостоятельное значение.

Замечание 2. В работе [6] (теорема 2, стр.153) установлена, в частности, следующая теорема.

Теорема 3. Пусть (N,7) = 1, если N – нечетное число, а –7 – квадратичный вычет по mod$N$, то число N представимо формой x^2 + $7y^2$.

Очевидно, теорема 3 намного упрощает исследование вопроса о разрешимости системы диофантовых уравнений

$$\begin{aligned} A_{26} &= x^2+7y^2, \\ B_{26} &= u^2+7\nu^2. \end{aligned} \qquad (5)$$

Задача 1. Остается открытой проблема непосредственного нахождения целого решения системы (5).

Задача 2. В работе [2] найдена серия уравнений, каждое из которых соответствует мнимому квадратичному полю $Q\left(\sqrt{D}\right)$ с числом классов идеалов h = 1 и бесквадратным D > 0, с аналогичным выводом о 10-й проблеме Гильберта. Исключив гауссово поле $Q\left(\sqrt{-1}\right)$ и учтя решение [7] общеизвестной проблемы десятого дискриминанта, получим 8 значений для D:

$D=2,\ 3,\ 7,\ 11,\ 19,\ 43,\ 67$ и 163.

Это приводит при нечетном D к серии уравнений:

$$3(x^2+3y^2)^2-(u^2+3\nu^2)^2=2; \qquad (6)$$
$$9(x^2+7y^2)^2-7(u^2+7\nu^2)^2=2;$$
$$11(x^2+11y^2)^2-9(u^2+11\nu^2)^2=2; \qquad (7)$$
$$38(x^2+19y^2)^2-36(u^2+19\nu^2)^2=2; \qquad (8)$$
$$258(x^2+43y^2)^2-256(u^2+43\nu^2)^2=2; \qquad (9)$$
$$402(x^2+67y^2)^2-400(u^2+67\nu^2)^2=2; \qquad (10)$$
$$326(x^2+163y^2)^2-324(u^2+163\nu^2)^2=2. \qquad (11)$$

Теорема 4 (обобщение теоремы 1). Если хотя бы одно из диофантовых уравнений (1), (6)–(11) не имеет нетривиальных решений (т. е. решений, отличных от $|x|=1$, y = 0; $|u|=1$, ν = 0), то 10 проблема Гильберта неразрешима в смысле рекурсивной теории чисел.

Как и при D = 7, для D = 3 имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Диофантово уравнение (6) имеет нетривиальное решение (x, y, u, ν).

Действительно, соответствующие рекуррентные формулы будут

$$A_{n+1}=2A_n+B_n,\quad B_{n+1}=3A_n+2B_n,\quad A_0=B_0=1.$$

Простой расчет дает: $A_6=2131=16^2+3\cdot 25^2$, $B_6=3691=4^2+3\cdot 35^2$, т. е. x = 16, y = 25, u = 4, ν = 35, и теорема 5 доказана.

Оставшиеся уравнения (7)–(11) предлагаются в качестве предмета дальнейших изысканий. Разумеется, их анализ невозможен без привлечения мощных компьютеров.

Список литературы

1. **Hilbert D.** Gesammelte Abhanolungen. – Berlin: Springer, 1935. – V. III. – P. 290–329.
2. **Davis M.** One equation to rule them all // The Rand Corporation Memorandum RM – 5494 – PR.
3. **Robinson J.** Existential definability in arithmetic // Trans. Amer. Math. Soc. – 1958. – 72. – P. 437–449.
4. **Lehmer D.H.** A Factorisation Theorem applied to a Test for Primality // Bull. Amer. MattSoc. – 1939. – 45. – P. 132–137.
5. **Matiyasevic Ju.** The Diophantine of enumerable sets // ДАН СССР. – 1970. – 191. – P. 279–282.
6. **Kern-Isberner Y**., Rosenberger Y. A notes on numbers of the form $n=x^2+Ny^2$ // Arch. Math. –1984. – V. 43. – № 2. – P. 148–156.
7. **Фельдман Н.И., Чудаков Н.Г.** О теореме Старка // Математические заметки. – 1972. – Т.11 – № 3. – С. 329–340.

Аванесов Эдуард Тигранович,
Пятигорский государственный технологический университет,
кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики,
e-mail: dekan@ivtf.ispu.ru

Гусев Владимир Алексеевич,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
кандидат физико-математических наук, профессор, зам. декана факультета информатики и вычислительной техники,
e-mail: dekan@ivtf.ispu.ru