

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ С ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

МУНИЦЫН А.И., канд. техн. наук

Приводится аналитическое решение задачи о вынужденных изгибных колебаниях стержня с неподвижными шарнирными опорами с учетом геометрической нелинейности, обусловленной изменением длины средней линии стержня при его пространственном движении. Качественно исследованы амплитудно-частотные характеристики системы в окрестности главного резонанса.

Ключевые слова: движение системы в одной плоскости, нелинейные колебания, метод усреднения, вынужденные колебания.

THE ANALYTIC SOLVING OF THE PROBLEM CONCERNING OSCILLATION OF THE ROD WITH GEOMETRIC NONLINEARITY

MUNITSYN A.I., Ph.D.

The article deals with the analytic solving of the problem of forced bending rod vibrations with immovable pivoting bearing taking into account the geometric nonlinearity caused by the change in centerline length of the rod during its spatial motion. The amplitude and frequency behaviour of the system in main resonance surrounding is analyzed.

Key words: the motion of system in one plane, nonlinear oscillation, averaging method, forced oscillation.

В классической задаче нелинейных колебаний струны и стержня с неподвижными шарнирными опорами [1] рассматривается движение системы в одной плоскости. Такие системы имеют жесткую геометрическую нелинейность. В исследованиях пространственных колебаний аналогичных систем [2, 3] обнаружена взаимосвязь колебаний в различных направлениях, что приводит к существованию как плоских форм движения, так и пространственных. При колебаниях нерастяжимой и упругой [4, 5] нити с натяжным устройством также присутствуют плоские и пространственные формы движения, с той разницей, что система имеет мягкую, а не жесткую упругую характеристику.

Для вынужденных колебаний в окрестности главного резонанса существует диапазон частот, при которых возникают устойчивые параметрические колебания в плоскости, ортогональной действию вынуждающей силы, и суммарное движение точек происходит по эллипсу.

Пусть центральная ось стержня в недеформированном состоянии совпадает с осью x прямоугольной системы координат, главные оси инерции поперечного сечения параллельны осям y и z . Концам стержня соответствуют координаты $x = 0$ и $x = L$. Обозначим через u, v, w перемещения точек средней линии стержня.

Уравнения пространственных нелинейных колебаний стержня, полученные без учета диссипации [3], имеют вид,

$$\begin{aligned} \pi^4 \ddot{v} + v^{IV} - 4\gamma \varepsilon_0 v'' &= f_1(x, t), \\ \pi^4 \ddot{w} + w^{IV} - 4\gamma \varepsilon_0 w'' &= f_2(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \int_0^L (v'^2 + w'^2) dx.$$

Все перемещения и координата x отнесены к длине стержня L . Точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени

$$t_* = \omega_0 t,$$

где $\omega_0 = (\pi/L)^2 (EJ)^{1/2} (\rho F)^{-1/2}$; E, ρ – модуль упругости и плотность материала стержня; F – площадь поперечного сечения; J – момент инерции сечения;

ε_0 – деформация средней линии; $f_k(x, t)$ – безразмерные нагрузки, направление которых совпадает с осями y и z (далее для определенности изучается случай гармонической нагрузки $f_k(x, t) = f_{k0} \cos(\mu t + \theta_k)$); введено обозначение для коэффициента, характеризующего нелинейность $\gamma = FL^2(4J)^{-1}$, а частота вращения стержня отнесена к первой собственной частоте изгибных колебаний ω_0 .

Система (1) должна быть дополнена граничными условиями: в частности, для стержня с неподвижными шарнирными опорами на концах имеем граничные условия

$$v = w = v'' = w'' = 0 \quad \text{при } x = 0, L. \quad (2)$$

Для одномодового приближения решение можно представить в виде

$$v(x, t) = \varphi_1(t) \sin \pi x, \quad w(x, t) = \varphi_2(t) \sin \pi x.$$

Подстановка его в (1) приводит к системе с двумя степенями свободы:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_k + \varphi_k + \varepsilon \gamma (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \varphi_k &= \\ = \varepsilon f_k \cos(\mu t + \theta_k), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

где введен малый параметр ε , т. е. нелинейность системы; угловая скорость вращения стержня и нормированное внешнее воздействие предполагаются асимптотически малыми, что позволяет применить эффективные методы нелинейной механики [6, 7].

Ограничимся рассмотрением колебаний в малой окрестности главного резонанса, т.е. при $\mu = 1 + \varepsilon \lambda, \lambda \approx 1$, для чего представим систему (2) в стандартной форме [4] при помощи перехода к новым переменным:

$$\begin{aligned} \varphi_k &= a_k \cos(\mu t + \alpha_k), \\ \dot{\varphi}_k &= -a_k \sin(\mu t + \alpha_k), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь a_k – амплитуды парциальных колебаний; α_k – фазовые добавки.

Применение метода усреднения позволяет получить достаточно простую систему уравнений в медленных переменных, позволяющую рассматривать колебания системы в малой окрестности единичной частоты:

$$\begin{aligned} \dot{a}_k &= \frac{1}{8} \varepsilon \gamma a_k a_{3-k}^2 \sin 2\Delta\alpha - \varepsilon \frac{f_k}{2} \sin(\alpha_k + \theta_k), \\ \dot{\alpha}_k &= -\varepsilon \lambda + \frac{3}{8} \varepsilon \gamma a_k^2 + \frac{1}{8} \varepsilon \gamma a_{3-k}^2 (2 + \cos 2\Delta\alpha) - \\ &- \varepsilon \frac{f_k}{2a_k} \cos(\alpha_{k1} + \theta_k), \\ \Delta\alpha &= \alpha_1 - \alpha_2, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Далее будем рассматривать установившиеся вынужденные колебания, что соответствует нулевым левым частям уравнений. Рассмотрим решения системы (5) для частного случая $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/2$, в этом случае вектор нагрузки описывает эллипс в плоскости yz . Решения задачи существуют при значениях фазовых добавок $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi/2$. В этом случае из первых двух уравнений следует $a_k = \text{const}, k = 1, 2$, а два последних уравнения принимают вид

$$-\lambda + \frac{3}{8} \gamma a_k^2 + \frac{1}{8} \gamma a_{3-k}^2 - \frac{f_k}{2a_k} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (6)$$

Уравнения свободных колебаний получаются из системы (4) при $f_k = 0$ и позволяют получить явные решения с помощью элементарных функций [3]. Исключая из полученной системы частотную расстройку λ , получаем соотношение между амплитудами и следующие решения:

$$\begin{aligned} 1) a_1 = 0, \text{ либо } a_2 = 0, \lambda &= \frac{3\gamma a_k^2}{8}; \\ 2) a_1 = \pm a_2, \lambda &= \frac{1}{2} \gamma a_k^2, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение 1 описывает известную зависимость амплитуды от частоты свободных колебаний стержня в плоскости [1] (рис. 1, кривая 1) для $\gamma = 1$. Решение 2 представляет амплитудно-частотную зависимость пространственных колебаний стержня, соответствующую движению точек средней линии по окружности в плоскости yz .

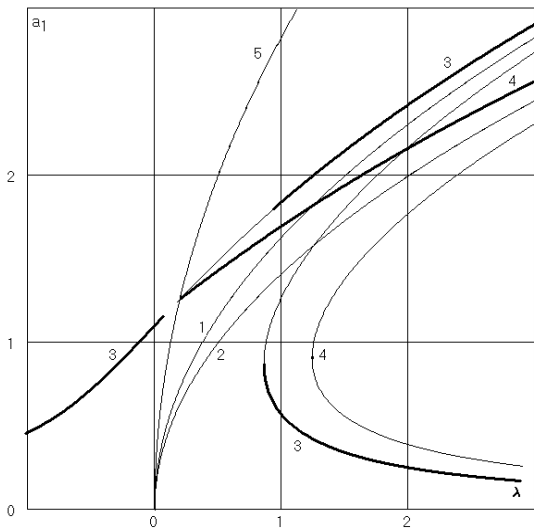


Рис. 1. Аналитические решения $a_1(\lambda)$: 1, 2 – решения (7) для свободных колебаний; 3 – пространственное решение (8) задачи о вынужденных колебаниях; 4 – плоское решение (9) той же задачи; 5 – зависимость (11) в области ее пересечения с кривой 3 (часть последней не приводится,

поскольку не выполняется условие $a_2 = \frac{4f_2}{\gamma a_1^2 - 8\lambda} < \delta$, где

δ – заданная погрешность); жирные линии – устойчивые решения

Качественная картина свободных колебаний стержня может быть представлена как сумма плоского и пространственного движений. В общем случае в результирующем движении присутствуют три гармоники с близкими частотами.

Рассмотрим практически важный случай вынужденных колебаний стержня под действием нагрузки, лежащей в одной плоскости, например y . В этом случае система (6) имеет аналитическое решение, поскольку диссипация не учитывается.

Вычитая из первого уравнения (6) второе, получаем соотношение амплитуд и выражаем частотную расстройку через a_1 :

$$\begin{aligned} a_2^2 &= a_1^2 - \frac{2f_1}{\gamma a_1}, \\ \lambda &= \frac{1}{2} \gamma a_1^2 - \frac{3f_1}{4a_1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Полученная амплитудно-частотная характеристика $a_1(\lambda)$ прилегает к скелетной кривой, задаваемой вторым решением (7) и соответствует пространственным формам колебаний. Решения (8) не существует в диапазоне амплитуд $0 < a_1 < (2f_1/\gamma)^{1/3}$.

Классическое решение для колебаний в плоскости нагрузки получается при допущении $a_2 = 0$ из второго уравнения (6) для $k = 1$:

$$\lambda = \frac{3}{8} \gamma a_1^2 - \frac{f_1}{2a_1}. \quad (9)$$

Это решение не является корректным, поскольку второе уравнение при этом не выполняется. Введем дополнительное предположение о наличии малой составляющей нагрузки в направлении z $f_2 \ll 1$ (на практике такая составляющая всегда присутствует, поскольку ни один источник гармонической нагрузки не является идеальным). В этом случае решение (8) нужно рассматривать как приближенное при выполнении условия $a_2 \ll 1$, а второе уравнение (6) позволяет определить амплитуду перемещений в направлении, ортогональном нагрузке:

$$a_2 = \frac{4f_2}{\gamma a_1^2 - 8\lambda}. \quad (10)$$

Таким образом, классическое решение задачи о вынужденных колебаниях стержня в плоскости справедливо всюду, кроме области, прилегающей к точке пересечения решения (9) с кривой

$$\lambda = \frac{1}{8} \gamma a_1^2, \quad (11)$$

на которой знаменатель (10) обращается в ноль. Ширина этой области зависит от принятых значений точности и амплитуды нагрузки f_2 .

Найденные аналитические решения представлены на рис.1, 2 в виде амплитудно-частотных зависимостей $a_1(\lambda), a_2(\lambda)$, приведенных для следующих значений параметров: $\gamma = 1, f_1 = 1, f_2 = 10^{-4}, \delta = 10^{-3}$. Исследование устойчивости проводилось на основе второго метода Ляпунова, алгоритм которого для этой же задачи подробно приведен в [3]. Исследование устойчивости решений сводится к нахождению собственных значений матрицы G , которая при отсутствии диссипации состоит из четырех блоков размерностью 2×2 , причем блоки G_{11} и G_{22} нулевые, а остальные два имеют вид

$$G_{12} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \gamma a_1 a_2^2 - 2f_1 & \gamma a_1 a_2^2 \\ \gamma a_1^2 a_2 & \gamma a_1^2 a_2 - 2f_2 \end{bmatrix},$$

$$G_{21} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3\gamma a_1 + 2f/a_1^2 & \gamma a_2 \\ \gamma a_1 & 3\gamma a_2 + 2f/a_2^2 \end{bmatrix}.$$

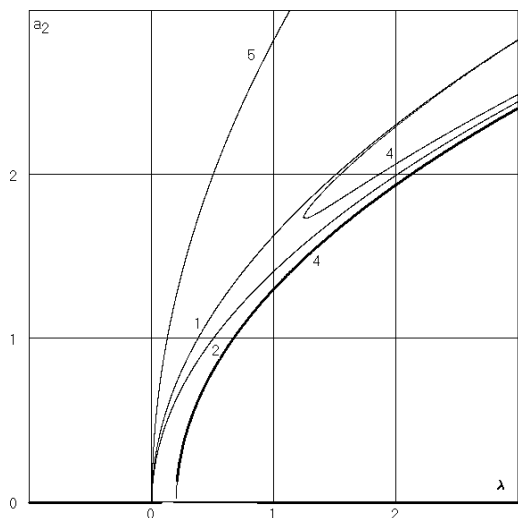


Рис. 2. Аналитические решения $a_2(\lambda)$ (обозначения как на рис. 1)

Согласно теоремам об устойчивости, по первому приближению знак действительной части всех собственных значений матрицы G позволяет сделать вывод об устойчивости решения. Поскольку матрица G содержит нули на главной диагонали, ее собственные значения определяются как корни биквадратного уравнения. Таким образом, для построения резонансных кривых и исследования их

Муницын Александр Иванович,
 ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
 кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики,
 e-mail: munizin@rambler.ru

устойчивости не требуется использования численных методов.

Полученное аналитическое решение подтверждает результаты численного моделирования в аналогичных задачах с геометрической нелинейностью для нити с натяжным устройством и стержня [3–5]. Точное решение системы уравнений (6) выявляет плавный переход зависимости $a_2(\lambda)$ от нуля на кривую 4 при выходе системы на резонанс. Учет диссипации приводит к тому, что устойчивый отрезок кривой 3, расположенный над кривой 4, становится неустойчивым.

Список литературы

1. Каудерер Г. Нелинейная механика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
2. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Вынужденные нелинейные колебания струны // Изв. РАН. МТТ. – 1996. – № 1. – С. 17–24.
3. Munitsyn A.I. Three-dimensional non-linear oscillations of a rod with hinged supports // Journal of appl. mathem. and mech. – 70(2006). – P. 65–72. (перевод Муницын А.И. Пространственные нелинейные колебания стержня с неподвижными шарнирными опорами // Прикл. матем. и механ. – 2006. – Т.70. – Вып 1. – С. 82–90.)
4. Муницын А.И. Нелинейные колебания нити с натяжным устройством // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – № 2. – С. 24–30.
5. Муницын А.И. Пространственные нелинейные колебания упругой нити с натяжным устройством // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2001. – № 2. – С. 21–28.
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974.
7. Найфэ А.Х. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984.