

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ивановский государственный энергетический университет
имени В.И. Ленина»

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ЭНЕРГОСИСТЕМ

ТРУДЫ ИГЭУ

Выпуск IX

Под редакцией

*доктора технических наук, профессора В.А. Шуина,
доктора технических наук, профессора М.Ш. Мисриханова,
доктора технических наук, профессора А.В. Мошкарина*

Москва 2009

УДК 621.311

ББК 31.37

П 42

Повышение эффективности работы энергосистем: Тр. ИГЭУ. Вып. IX / Под ред. В.А. Шуина, М.Ш. Мисриханова, А.В. Мошкарин. – М.: Энергоатомиздат, 2009. – 572 с.

ISBN 978-5-283-03312-9

Редакционная коллегия:

д-р техн. наук, проф. С.В. Тарарькин,
д-р техн. наук, проф. Б.М. Ларин, д-р техн. наук, проф. М.Ш. Мисриханов,
д-р техн. наук, проф. А.В. Мошкарин, д-р техн. наук, проф. В.Н. Нуждин,
д-р техн. наук, проф. В.А. Савельев, д-р техн. наук, проф. В.А. Строев,
д-р техн. наук, проф. В.А. Шуин, д-р техн. наук, проф. А.В. Шунтов

Рецензенты:

д-р техн. наук, В.Г. Наровлянский (ОАО «Институт Энергосетьпроект», г. Москва);

д-р техн. наук, проф. А.В. Шунтов (Информационно-вычислительный центр Мосэнерго);

д-р техн. наук, проф. Ю.А. Митькин (ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»)

В предлагаемой читателю книге представлены статьи, являющиеся результатами разработок, теоретических и экспериментальных исследований в области теплоэнергетики, электроэнергетики, систем управления и автоматизации, компьютерных технологий, выполненных сотрудниками Ивановского государственного энергетического университета, МЭС Центра ОАО «ФСК ЕЭС», а также других вузов, научно-исследовательских, проектных и эксплуатационных организаций.

Книга предназначена для специалистов, занимающихся исследованием, разработкой, проектированием и эксплуатацией энергетических систем, электрических станций и сетей, комплексов и устройств их автоматического управления.

ISBN 978-5-283-03312-9

© Авторы, 2009

УДК 519.6

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ОСНОВЫ ТЕОРИИ

М.Ш. Мисриханов, д-р техн. наук, В.Н. Рябченко, д-р ф.-м. наук

Введение. Аппарат динамических систем получил широкое распространение при решении актуальных научно-технических задач. Поэтому интерес исследователей к этим объектам на современном этапе развития теории систем не только не угасает, но и существенно усиливается [1].

В цикле работ [2 – 9] изложены основы теории локализации (теории вложения систем), которая позволяют по-новому ставить и решать ряд традиционных задач анализа и синтеза в теории систем. Например, для достаточно богатого множества современных объектов управления, которые могут быть представлены в виде линейных моделей, разработчики систем управления традиционно используют регулярные законы управления (количество управляющих сигналов в них совпадает с количеством органов управления). В случаях, когда сформулированные требования к качеству управления не могут быть обеспечены регулярным законом управления, эти требования ослабляют до тех пор, пока задача не будет решена. Известно также, что возможности регулярных законов управления ограничены инвариантами по управлению [2]. Преодолеть эти инварианты можно, используя нерегулярные законы управления (количество управляющих сигналов меньше количества органов управления). В связи с тем, что систематические методы синтеза нерегулярных законов управления не разработаны, нерегулярные законы используются крайне редко. Однако технология вложения систем позволяет систематически строить как регулярные, так и нерегулярные законы управления, а также выполнять параметризацию этих законов (построение не только одного закона, но и множества других, выполняющих поставленную задачу) [10].

Существующая теория локализации систем основывается на выполнении некоторых равенств (тождеств), называемых условиями локализа-

ции (вложения). Рассмотрим проблему локализации систем с позиций выполнения условий локализации в виде неравенств.

Описание систем в пространстве состояний. Пусть конечномерная линейная стационарная динамическая система описывается системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор пространства состояния системы (или просто состояние); $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ – вектор начальных условий (или просто начальные условия); $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор входов системы (или просто вход); $y(t) \in \mathbb{R}^p$ – вектор выходов системы (или просто выход). Матрицы коэффициентов A, B, C, D имеют подходящие размеры.

Динамическая система с одним входом ($m = 1$) и одним выходом ($p = 1$) именуется SISO-системой (single input – single output). Соответственно, при $m > 1, p = 1$ применяется термин MISO-система (multi input – single output), при $m = 1, p > 1$ – SIMO-система (single input – multi output), при $m > 1, p > 1$ – MIMO-система (multi input – multi output) [11]. Соответствующая передаточная матрица (для SISO-системы – передаточная функция) от входа $u(t)$ к выходу $y(t)$ определяется на основе алгебраического уравнения

$$y(s) = G(s)u(s),$$

где $u(s), y(s)$ – преобразования Лапласа векторов $u(t), y(t)$ при нулевых начальных условиях $x(0) = 0$.

Тогда, согласно (1), имеем

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D, \quad (2)$$

где I_n – единичная матрица размера $n \times n$.

Систему уравнений (1) можно записать в компактной (блочной) матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) вытекает принятая в современной теории систем форма так называемой системной матрицы и передаточной матрицы (3) [12, 13]:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \triangleq C(sI_n - A)^{-1}B + D. \quad (4)$$

Описание систем в форме проматрицы. Сконструируем для системы (1) так называемую проматрицу системы [4]. В общем случае количество уравнений в (1) не совпадает с числом фигурирующих в ней переменных, поскольку внешние воздействия $u(t)$ формально не зависят от других сигналов. Допишем к уравнениям (1), не нарушая постановки задачи, условие на внешние сигналы $u(t)$ в виде регуляризирующего тождества (регуляризирующего пополнения по Тихонову)

$$u(t) = u(t). \quad (5)$$

Применяя к полученной системе уравнений преобразование Лапласа, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (sI_n - A)x(s) - Bu(s) &= x_0, \\ y(s) - Cx(s) - Du(s) &= 0, \\ u(s) &= u(s), \end{aligned} \quad (6)$$

которую можно переписать в блочно-матричном виде:

$$\begin{pmatrix} sI_n - A & 0_{n \times p} & -B \\ -C & I_p & -D \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times p} & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ u(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0_{m \times 1} \\ u(s) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Введем в (7) следующие обозначения:

$$\Omega(s) = \begin{pmatrix} sI_n - A & 0 & -B \\ -C & I_p & -D \\ 0 & 0 & I_m \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$Y(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ u(s) \end{pmatrix}, \quad U(s) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0_{p \times 1} \\ u(s) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Векторы (9) будем называть соответственно обобщенным выходом и обобщенным входом системы.

Матрица $\Omega(s)$ называется проматрицей. Этот термин происходит от полного наименования «проблемная матрица» и является вполне обоснованным, так как он полностью характеризуют ту задачу теории систем (проблему), для которой построена проматрица.

Наиболее общие свойства проматриц на примере матрицы (8) выглядят следующим образом:

- квадратность (число строк всегда совпадает с числом столбцов);
- автономность представления компонентов, являющихся матричными коэффициентами уравнений подсистем и уравнений взаимосвязи между ними;
- полнота, невырожденность (определитель проматрицы тождественно не равен нулю);
- разреженность (наличие относительно большого количества нулевых и единичных блоков);
- универсальность (с точки зрения решаемой задачи и формы представления моделей динамических систем).

Квадратная дробно-рациональная матрица $\Omega^{-1}(s)$, которая обобщенному входу $U(s)$ ставит в соответствие обобщенный выход $Y(s)$ по формуле

$$Y(s) = \Omega^{-1}(s)U(s), \quad (10)$$

называется реверсивной проблемной матрицей.

По аналогии с передаточными матрицами, реверсивную проматрицу $\Omega^{-1}(s)$ можно трактовать как обобщенную передаточную матрицу от обобщенного входа $U(s)$ к обобщенному выходу $Y(s)$. Обобщенной она является, прежде всего, потому, что содержит все возможные передаточные функции от всех субвекторов, включенных в обобщенный вход $U(s)$, ко всем субвекторам, включенным в обобщенный выход $Y(s)$.

Отметим следующее принципиальное свойство реверсивных проматриц, а именно: взаимно однозначное соответствие проматрицы и реверсивной проматрицы, т.е.

$$\Omega(s) = \left(\Omega^{-1}(s) \right)^{-1}.$$

В соответствии с этим свойством, совокупность всех передаточных функций линейной системы, структурированная определенным образом, полностью эквивалентна исходным уравнениям линейной системы. Только в этом случае из передаточных функций линейной системы можно восстановить все коэффициенты ее исходных уравнений.

Кратко рассмотрим способы формального получения реверсивной проматрицы, используя известные методы обращения матриц [16, 17]. Один из них основан на вычислении присоединенной матрицы, т.е.

$$\Omega^{-1}(s) = \frac{1}{\det \Omega(s)} \Omega^{Adj}(s).$$

Здесь $\Omega^{Adj}(s)$ – присоединенная матрица.

Поэлементное обращение проматрицы по этой формуле позволяет получить любую из скалярных передаточных функций

$$f_{y_i}^{u_j}(s) = f_{ij}(s) = \frac{y_i(s)}{u_j(s)}, \quad i \in \overline{1, m}, \quad j \in \overline{1, r},$$

от j -й компоненты $u_j(s)$ обобщенного входа $U(s)$ к i -й компоненте $y_i(s)$ обобщенного выхода $Y(s)$ системы. При этом принадлежность той или иной передаточной функции к конкретной паре точек «вход – выход» системы определяется последовательностью компонент обобщенных входа и выхода.

Другой метод обращения матриц основан на разбиении матрицы на блоки с последующим вычислением блоков обратной матрицы, например, по формулам Фробениуса. Следуя этому методу, получим при обращении проматрицы (8) следующую матрицу:

$$\Omega^{-1}(s) = \begin{pmatrix} (sI_n - A)^{-1} & 0 & (sI_n - A)^{-1} B \\ C(sI_n - A)^{-1} & I_p & C(sI_n - A)^{-1} B + D \\ 0 & 0 & I_m \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Матрица (11) содержит все передаточные матрицы, которые можно определить для системы (1).

Применим к (11) следующее преобразование:

$$(0 \quad I_p \quad 0) \begin{pmatrix} (sI_n - A)^{-1} & 0 & (sI_n - A)^{-1} B \\ C(sI_n - A)^{-1} & I_p & C(sI_n - A)^{-1} B + D \\ 0 & 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{pmatrix}$$

или в другом виде

$$(0 \quad I_p \quad 0) \begin{pmatrix} sI_n - A & 0 & -B \\ -C & I_p & -D \\ 0 & 0 & I_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Нетрудно заметить, что (12) равно

$$\begin{aligned} (0 \quad I_p \quad 0) \begin{pmatrix} sI_n - A & 0 & -B \\ -C & I_p & -D \\ 0 & 0 & I_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{pmatrix} &= \\ &= C(sI_n - A)^{-1} B + D, \end{aligned} \quad (13)$$

т.е. передаточной матрице (2), которая, в свою очередь, равна системной матрице

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right). \quad (14)$$

На основании (12) – (14) можно записать равенство преобразованной проматрицы и системной матрицы

$$(0 \quad I_p \quad 0) \begin{pmatrix} sI_n - A & 0 & -B \\ -C & I_p & -D \\ 0 & 0 & I_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right), \quad (15)$$

являющееся ключевым в дальнейшем изложении.

Свойства систем. Управляемость и наблюдаемость. Понятия управляемости и наблюдаемости являются важнейшими в теории линейных систем [1, 11 – 13]. Для управляемой динамической системы (1), (4) следующие утверждения являются эквивалентными (равносильными) [11 – 13]:

- а) (A, B) управляемая пара;
- б) матрица

$$W_c(t) \triangleq \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

- положительно определена при $t > 0$;
- в) матрица управляемости Калмана

$$\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

имеет полный (строчный) ранг;

- г) матрица $(A - \lambda I_n \quad B)$ имеет полный (строчный) ранг при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ (критерий Попова-Белевича-Хотиса);

д) пусть λ и x – соответственно собственное значение и левый собственный вектор матрицы A , т.е. $x^T A = x^T \lambda$, тогда $x^T B \neq 0$;

- е) пусть B_\perp – матрица, при которой матрица $\begin{pmatrix} B_\perp^T & B^T \end{pmatrix}$ невырождена, тогда матрица

$$\begin{pmatrix} B_\perp A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_\perp & B_\perp A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_\perp & B_\perp A & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_\perp & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & B_\perp A \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_\perp \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-m+1)(n-m) \times (n-m+1)(n-1)}$$

имеет полный ранг по строкам [14, 15];

- ж) собственные значения матрицы $A + BF$ могут быть заданы произвольным образом и непрерывно зависят от матрицы обратной связи F .

Динамическая система

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

называется устойчивой (асимптотически устойчивой), если все собственные значения матрицы A лежат в открытой левой полуплоскости: $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$. Такая матрица A также называется гурвицевой.

Рассмотрим дуальные утверждения, касающиеся понятия наблюдаемости. Для наблюдаемой динамической системы, описываемой уравнениями (1), (4), следующие утверждения являются эквивалентными [11 – 13]:

а) (C, A) управляемая пара;

б) матрица

$$W_o(t) \triangleq \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

положительно определена при $t > 0$;

в) матрица наблюдаемости Калмана

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

имеет ранг по столбцам;

г) матрица

$$\begin{pmatrix} A - \lambda I_n \\ C \end{pmatrix}$$

имеет полный (строчный) ранг при всех $\lambda \in \mathbb{C}$;

д) пусть λ и y – соответственно собственное значение и правый собственный вектор матрицы A , т.е. $Ay = \lambda y$, тогда $Cy \neq 0$;

е) пусть C_{\perp} – матрица, при которой матрица $(C_{\perp} \ C)$ невырождена, тогда матрица

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} AC_{\perp} & C_{\perp} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & AC_{\perp} & C_{\perp} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & AC_{\perp} & C_{\perp} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & AC_{\perp} & C_{\perp} \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(n-p+1)(n-1) \times (n-p+1)(n-p)}$$

имеет полный ранг по столбцам [14, 15];

ж) собственные значения матрицы $A + LC$ могут быть заданы произвольным образом и непрерывно зависят от матрицы L .

Реализации. Предположим, что динамическая система задана правильной (собственной или строго собственной) рациональной матрицей $G(s)$ от переменной s , т.е.

$$G(j\infty) = 0. \quad (16)$$

Тогда модель в пространстве состояний в форме

$$G(s) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & I_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI_n - A & 0 & -B \\ -C & I_p & -D \\ 0 & 0 & I_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{pmatrix} \quad (17)$$

называют реализацией системы.

Реализация (17) считается минимальной, т.е. имеет минимальную размерность в пространстве состояний, если и только если пара матриц (A, B) – управляемая, а пара (C, A) – наблюдаемая [11 – 13].

Минимальная реализация SIMO-системы называется канонической управляемой, если передаточная матрица [12]

$$G(s) = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \cdots + \beta_{n-1} s + \beta_0}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_0} + d, \quad \beta_i \in \mathbb{R}^p, \quad d \in \mathbb{R}^p,$$

в форме (17) задана системной матрицей вида

$$G(s) = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline C & d \end{array} \right), \quad (18)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_{n-1} \quad \beta_n).$$

Дуально, минимальная реализация MISO-системы называется канонической наблюдаемой, если передаточная матрица [12]

$$G(s) = \frac{\alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_0}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_0} + d,$$

$$\alpha_i^T \in \mathbb{R}^m, \quad d^T \in \mathbb{R}^m,$$

в форме (17) задана системной матрицей вида

$$G(s) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline c & d \end{array} \right), \quad (19)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

$$C = (1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0).$$

Для MIMO-систем канонических форм в пространстве состояний типа (18), (19) не существует. Однако реализация передаточной матрицы $G(s)$, например, блочного вида

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_1(s) & G_2(s) \\ G_3(s) & G_4(s) \end{pmatrix}$$

может быть названа условно канонической (псевдоканонической), когда ее системная матрица

$$G(s) = \left(\begin{array}{cccc|cc} A_1 & 0 & 0 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 & 0 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & 0 & 0 & D_1 & D_2 \\ 0 & 0 & C_3 & C_4 & D_3 & D_4 \end{array} \right)$$

составлена из матриц вида (18) и/или (19) [12].

Пусть $G(s)$ передаточная матрица размера $p \times m$ записана в следующем виде:

$$G(s) = \frac{N(s)}{a(s)}, \quad a(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_r), \quad \lambda_i \neq \lambda_j,$$

тогда существует следующее представление $G(s)$:

$$G(s) = D + \sum_{i=1}^r \frac{W_i}{s - \lambda_i}.$$

Предположим далее, что $\text{rank } W_i = k_i$, и пусть $B_i \in \mathbb{R}^{k_i \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{p \times k_i}$ – такие действительные матрицы, что $W_i = C_i B_i$.

Тогда реализацией Гильберта передаточной матрицы $G(s)$ является системная матрица вида [11, 12]

$$G(s) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 I_{k_1} & & 0 & B_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \lambda_r I_{k_r} & B_r \\ \hline C_1 & \cdots & C_r & D \end{array} \right),$$

представляющая управляемую и наблюдаемую динамическую систему.

Соединения систем. Предположим, что передаточные матрицы $G_1(s)$ и $G_2(s)$ описывают две динамические системы с минимальной реализацией в пространстве состояний:

$$G_1 = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right), \quad G_2 = \left(\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right).$$

Тогда последовательное соединение систем с данными передаточными матрицами может быть представлено в пространстве состояний следующим образом [12]:

$$\begin{aligned} G_1 \cdot G_2 &= \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1 C_2 & B_1 D_2 \\ \hline 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & D_1 C_2 & D_1 D_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} A_2 & 0 & B_2 \\ \hline B_1 C_2 & A_1 & B_1 D_2 \\ \hline D_1 C_2 & C_1 & D_1 D_2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ясно при этом, что, например,

$$\begin{aligned} G_1 \cdot G_2 &= \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right) = \\ &= (0 \quad I' \quad 0) \begin{pmatrix} sI - \begin{pmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} & 0 & -\begin{pmatrix} B_1 D_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} C_1 & D_1 C_2 \end{pmatrix} & I' & -D_1 D_2 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Параллельное соединение $G_1(s)$ и $G_2(s)$ представляется следующим образом [12]:

$$\begin{aligned} G_1 + G_2 &= \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right) \triangleq \left(\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ \hline 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D_2 \end{array} \right) = \\ &= (0 \quad I' \quad 0) \begin{pmatrix} sI - \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} & 0 & -\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} & I' & -D_1 - D_2 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что операции (\cdot) и $(+)$ по отношению к матрицам Рунге должны пониматься в указанном выше смысле.

Под транспозицией передаточной матрицы $G(s)$ будем понимать отображение

$$G(s) \rightarrow G^T(-s) = B^T (sI_n - A^T)^{-1} C^T + D^T$$

или эквивалентно

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} A^T & B^T \\ \hline C^T & D^T \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & I' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI_n - A^T & 0 & -B^T \\ -C^T & I' & -D^T \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix}.$$

Для динамических систем с параметрами из поля комплексных чисел \mathbb{C} операция транспозиции выполняется следующим образом:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} A^* & B^* \\ \hline C^* & D^* \end{array} \right).$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$G^*(j\omega) = (G(j\omega))^* = \widehat{G}(j\omega).$$

Обратную матрицу $G^{-1}(s)$ к передаточной матрице $G(s)$ такую, что

$$G(s)G^{-1}(s) = G^{-1}(s)G(s) = I,$$

при условии, что матрица D обратимая, будем представлять в виде

$$\begin{aligned} G^{-1}(s) &= \left(\begin{array}{c|c} A - BD^{-1}C & -BD^{-1} \\ \hline D^{-1}C & D^{-1} \end{array} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & I_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI_n - A - BD^{-1}C & 0 & -BD^{-1} \\ D^{-1}C & I_p & -D^{-1} \\ 0 & 0 & I_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Нули передачи и полюсы системы. Пусть передаточная матрица $G(s)$ имеет размер $(m \times p)$, тогда ее нормальный ранг определяется как максимально возможный ранг (максимально возможное число линейно независимых столбцов и/или строк) при всех значениях переменной $s \in \mathbb{C}$ [18, 19]:

$$\max_{s \in \mathbb{C}} \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A - sI_n & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Полюсы и нули передаточной матрицы могут быть охарактеризованы в пространстве состояний.

Пусть $G(s)$ имеет реализацию (17) с минимальным пространством $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда собственные значения λ_i , $i = \overline{1, n}$, матрицы A , или кратко $\lambda(A)$, называются полюсами реализации $G(s)$.

Для определения нулей $G(s)$ рассмотрим следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} A - sI_n & B \\ C & D \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Комплексное число $z_0 \in \mathbb{C}$ называется нулем передачи (передаточным нулем) реализации системы, если [18, 19]

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A - z_0 I_n & B \\ C & D \end{pmatrix} < \max_{s \in \mathbb{C}} \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A - sI_n & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Передаточные нули не изменяются при действии обратной связи F , поскольку справедливо преобразование вида

$$\begin{aligned} & \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A + BF - z_0 I_n & B \\ C + DF & D \end{pmatrix} = \\ & = \operatorname{rank} \left(\begin{pmatrix} A - z_0 I_n & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ F & I_m \end{pmatrix} \right) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A - z_0 I_n & B \\ C & D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Передаточные нули также не изменяются при действии преобразования подобия.

Предположим, что матрица (20) имеет полный столбцовый ранг, тогда комплексное число $z_0 \in \mathbb{C}$ называется инвариантным нулем реализа-

ции (A, B, C, D) , если и только если существуют такие ненулевые векторы $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ и $0 \neq u \in \mathbb{C}^m$, что [18, 19]

$$\begin{pmatrix} A - z_0 I_n & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = 0.$$

Более того, если $u = 0$, тогда комплексное число $z_0 \in \mathbb{C}$ представляет собой ненаблюдаемую моду.

Предположим теперь, что матрица (20) имеет полный строчный ранг, тогда комплексное число $z_0 \in \mathbb{C}$ называется инвариантным нулем реализации (A, B, C, D) , если и только если существуют такие ненулевые векторы $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ и $0 \neq y \in \mathbb{C}^p$, что [18, 19]

$$\begin{pmatrix} x^* & y^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - z_0 I_n & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0,$$

при этом если $y = 0$, тогда комплексное число $z_0 \in \mathbb{C}$ представляет собой неуправляемую моду.

Локализация (вложение) систем. Локализация (вложение) систем [2 – 10] возникла как следствие использования современных результатов алгебры частных [20] в задачах анализа и синтеза многосвязных динамических систем. Ее суть заключается в эквивалентном преобразовании записанной в произвольной форме системы матричных уравнений решаемой задачи в некоторую универсальную форму, содержащую только линейные и/или билинейные матричные уравнения.

Локализация (вложение) систем предполагает последовательное выполнение трех основных этапов.

На первом этапе из исходных матричных уравнений, составляющих модель исследуемой системы, конструируется проматрица решаемой задачи.

Локализация скалярного образа. Пусть система задана проматрицей $\Omega(s)$ и пусть все элементы ее обобщенного входа $U(s)$ получают по известному правилу α из одного сигнала $u(s)$, а все сигналы $Y(s)$ сворачиваются по правилу β и образуют скалярный выход $y(s)$. Это можно записать в виде совокупности уравнений

$$\Omega(s)Y(s) = U(s), \quad U(s) = \alpha u(s), \quad y(s) = \beta Y(s). \quad (21)$$

Матрицы α и β представляют собой соответственно числовые или полиномиальные вектор-столбец и вектор-строку и называются матрицами локализации (вложения).

Выберем скалярную систему с передаточной функцией $f(s)$ такую, что ее реакция на сигнал $u(s)$ равна $y(s)$ в соответствии с уравнением

$$a(s) y(s) = b(s) u(s). \quad (22)$$

В этом случае скалярная передаточная функция

$$f(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \quad (23)$$

называется скалярным образом системы (21). Из этого вытекает выражение

$$\beta(s)\Omega^{-1}(s)\alpha(s) = \frac{b(s)}{a(s)}, \quad (24)$$

именуемое тождеством скалярной локализации (вложения в скалярный образ).

Уравнения (21), (22) можно записать в обобщенной матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a(s) & 0 & -b(s) \\ 0 & \Omega(s) & -\alpha(s) \\ -1 & \beta(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(s) \\ Y(s) \\ u(s) \end{pmatrix} = 0. \quad (25)$$

Матричное уравнение (25) имеет нетривиальное решение, если и только если выполняется условие

$$\forall s \in \mathbb{C}: \det \begin{pmatrix} a(s) & 0 & -b(s) \\ 0 & \Omega(s) & -\alpha(s) \\ -1 & \beta(s) & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (26)$$

Матрица в (25) представляет собой конструкцию Малколмсона [21], а в (26) – условие локализации по Кону скалярного образа [20]. Для про-

матрицы любого размера раскрытие определителя (26) приводит к эквивалентным детерминантным соотношениям:

$$a(s) \det \begin{pmatrix} \Omega(s) & -\alpha(s) \\ \beta(s) & 0 \end{pmatrix} - b(s) \det \Omega(s) = 0, \quad (27)$$

$$a(s) \det [\Omega(s) + \alpha(s) \beta(s)] - [a(s) + b(s)] \det \Omega(s) = 0. \quad (28)$$

Локализация произвольного образа. Пусть далее система задана проматрицей $\Omega(s)$ размера $N \times N$ и пусть все элементы ее обобщенного входа $U(s)$ получаются по известному правилу α из r сигналов $u(s)$, а все элементы ее обобщенного выхода $Y(s)$ сворачиваются по правилу β в m сигналов $y(s)$. Данные условия, как и прежде, можно записать в виде системы уравнений (21), где ненулевые матрицы α и β имеют размеры соответственно $N \times r$, $m \times N$ при условии $r, m \leq N$.

Будем теперь считать, что задана (желаемая) динамическая система с передаточной матрицей $\omega(s)$, а ее реакция на входной сигнал $u(s)$ равна $y(s)$:

$$y(s) = \omega(s) u(s). \quad (29)$$

В этом случае передаточная матрица

$$\omega(s) = \beta(s) \Omega^{-1}(s) \alpha(s) \quad (30)$$

называется произвольным (матричным) образом системы.

Записывая (21), (29) в блочно-матричной форме, получим

$$\begin{pmatrix} \Omega(s) & \alpha(s) \\ \beta(s) & \omega(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y(s) \\ -u(s) \end{pmatrix} = 0. \quad (31)$$

Таким образом, для существования (31) необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} \Omega(s) & \alpha(s) \\ \beta(s) & \omega(s) \end{pmatrix} \quad (32)$$

была вырожденна для всех значений s .

Это условие вырожденности обеспечивается существованием факторизации матрицы (32), например, следующего вида [22]:

$$\begin{pmatrix} \Omega(s) & \alpha(s) \\ \beta(s) & \omega(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma(s) \\ \pi(s) \end{pmatrix} (\Xi(s) \quad \delta(s)), \quad (33)$$

где $\Sigma(s)$, $\Xi(s)$ – обратимые матрицы, а $\pi(s)$, $\delta(s)$ – некоторые подходящие (вспомогательные) матрицы.

Факторизация (33) называется условием локализации по Кону произвольного образа [20, 22].

Формирование тождеств локализации (24), (30) составляет второй этап рассматриваемого подхода. Эти тождества формализуют цели решаемой задачи. Принципиальным является тот факт, что любая передаточная функция или матрица, которая может быть задана в качестве желаемой, содержится в явном виде в реверсивной проматрице, т.е. обратной к проматрице. В этом смысле характерным примером локализации (вложения) является равенство (15).

Третий этап локализации направлен на разрешение тождеств типа (24), (30) относительно заданного образа. Если явное разрешение невозможно, то тождество локализации преобразуется к детерминантным тождествам, либо линейным или билинейным матричным уравнениям относительно этих искомым матриц.

Таким образом, локализация системы может быть истолкована различным образом и с различных позиций.

Теоретическая и практическая значимость результатов по локализации систем состоит в следующем:

- что и как в многомерной и многосвязной системе влияет на общие свойства системы (задача анализа);

- что и как нужно изменить в многомерной и многосвязной системе, чтобы в результате система в целом приобрела некоторые заранее заданные свойства (первая фаза задачи синтеза – построение представителя множества эквивалентных решений);

- что и как можно менять в многомерной и многосвязной системе при неперменном сохранении всех общих свойств системы (вторая фаза задачи синтеза – построение всего множества эквивалентных решений).

Нормируемые пространства. Гильбертово пространство. Определим скалярное произведение векторов, определенных в евклидовом пространстве \mathbb{C}^n , как операцию вида [12, 17]

$$\langle x, y \rangle = x^* y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i, \quad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n. \quad (34)$$

Из (34) можно определить длину (норму) вектора $x \in \mathbb{C}^n$

$$\|x\| \triangleq (\langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

и угол между векторами $x, y \in \mathbb{C}^n$

$$\cos \angle(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}, \quad \angle(x, y) \in [0, \pi].$$

Будем говорить, что два вектора ортогональны $x \perp y$, если

$$\angle(x, y) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0.$$

Расстояние между двумя векторами может быть определено в виде нормы

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Рассмотрим обобщение внутреннего произведения векторов в комплексном пространстве \mathbb{C}^n на произвольное, возможно бесконечномерное, векторное пространство. Пусть V – векторное пространство, заданное над \mathbb{C} . Скалярным произведением векторов в V будем называть комплексную функцию

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C},$$

такую, что для любых векторов $x, y, z \in V$ и скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ выполняются следующие условия:

1. $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$;
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
3. $\langle x, y \rangle > 0$, если $x \neq 0$;
4. $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$.

Будем говорить, что вектор x ортогонален к подпространству $S \subset V$, если

$$x \perp y \quad \forall y \in S.$$

Скалярное произведение на V обладает следующими важными свойствами:

5. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (неравенство Коши-Шварца);
6. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (свойство параллелограмма);
7. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, если $x \perp y$.

Векторное пространство, в котором выполняются приведенные выше условия, называется гильбертовым пространством. Очевидно, что комплексное векторное пространство \mathbb{C}^n является конечномерным гильбертовым пространством. Пространство комплексных матриц $\mathbb{C}^{n \times m}$ с произведением

$$\langle A, B \rangle \triangleq \text{tr} A^* B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{a}_{ij} b_{ij} \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n \times m},$$

также относится к гильбертовым конечномерным пространствам.

Хорошо известным бесконечномерным гильбертовым пространством является пространство $L_2[a, b]$ всех интегрируемых с квадратом и измеримых по Лебегу функций, определенных на интервале $[a, b]$, и с внешним произведением вида

$$\langle f, g \rangle \triangleq \int_a^b f^*(t)g(t)dt, \quad f, g \in L_2[a, b].$$

Если рассматриваемые функции являются векторными или матричными функциями, то существует интеграл

$$\langle f, g \rangle \triangleq \int_a^b \text{tr} (f^*(t)g(t))dt. \tag{35}$$

Далее будут использоваться пространства $L_2[0, \infty)$, $L_2(-\infty, 0]$, $L_2(-\infty, \infty)$. Так, в случае $L_2 = L_2(-\infty, \infty)$ интеграл (35) принимает вид

$$\langle f, g \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left(f^*(t)g(t) \right) dt.$$

При этом $L_{2+} = L_2[0, \infty)$ – подпространство в $L_2(-\infty, \infty)$ с нулями функции при $t < 0$; $L_{2-} = L_2(-\infty, 0]$ – подпространство в $L_2(-\infty, \infty)$ с нулями функции при $t > 0$.

Сигнал $x(t) \in L_2$ может быть интерпретирован как сигнал с ограниченной энергией.

Пространства Харди. Пусть далее $S \subset \mathbb{C}$ – открытое множество и пусть комплексная функция $f(s)$ определена на S [12]:

$$f(s) : S \rightarrow \mathbb{C}.$$

Будем говорить, что $f(s)$ аналитична в точке z_0 , если она дифференцируема в z_0 и некоторой ее окрестности. Из этого следует дифференцируемость всех старших порядков $f(s)$ в z_0 .

Пространством $L_2(j\mathbb{R})$ или просто гильбертовым пространством матричных функций, определенных на $j\mathbb{R}$, называется множество, состоящее из всех комплексных матриц F , для которых выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left(F^*(j\omega)F(j\omega) \right) d\omega < 0.$$

Другими словами, пространство $L_2(j\mathbb{R})$ состоит из интегрируемых с квадратом и ограниченных на $(-\infty, \infty)$ функций.

Произведение матричных функций $\langle F, G \rangle$ для гильбертова пространства определяется как

$$\langle F, G \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left(F^*(j\omega)G(j\omega) \right) d\omega < 0. \quad (36)$$

Для $F, G \in L_2(j\mathbb{R})$ (36) индуцирует норму

$$\|F\|_2 \triangleq \sqrt{\langle F, F \rangle}.$$

Пространство Харди H_2 есть замкнутое подпространство в $L_2(j\mathbb{R})$ матричных функций $F(s)$, интегрируемых с квадратом на мнимой оси и

аналитическим продолжением в правую полуплоскость при $\text{Re}(s) > 0$. Соответствующая норма определяется как

$$\|F\|_2^2 = \sup_{\sigma > 0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left(F^*(\sigma + j\omega) F(\sigma + j\omega) \right) d\omega \right\}. \quad (37)$$

Можно показать, что

$$\|F\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left(F^*(j\omega) F(j\omega) \right) d\omega.$$

Таким образом, норма в пространстве H_2 может быть вычислена так же, как это делается в L_2 .

Пространство Харди H_2^\perp есть ортогональное к H_2 замкнутое подпространство функций в $L_2(j\mathbb{R})$, интегрируемых с квадратом на мнимой оси и аналитическим продолжением в левую полуплоскость при $\text{Re}(s) < 0$. Если $G \in H_2$, тогда $\check{G} \in H_2^\perp$.

Справедливы следующие отношения изоморфности (отношения Парсеваля):

- $L_2(-\infty, \infty) \cong L_2(j\mathbb{R})$;
- $L_2[0, \infty) \cong H_2$;
- $L_2(-\infty, 0] \cong H_2^\perp$.

В результате, если некоторая функция $g(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ и ее преобразование Лапласа $G(s) \in L_2(j\mathbb{R})$, тогда

$$\|G\|_2 = \|g\|_2.$$

Это ключевое отношение, позволяющее ассоциировать норму функции во временной области с нормой в частотной области. Обобщая сказанное, можно привести следующую коммутативную диаграмму [12]:

$$\begin{array}{ccc}
 L_2[0, \infty) & \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{прямое преобразование Лапласа}} \\ \xrightarrow{\text{обратное преобразование Лапласа}} \end{array} & H_2 \\
 \uparrow P_+ & & \uparrow P_+ \\
 L_2(-\infty, \infty) & \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{прямое преобразование Лапласа}} \\ \xrightarrow{\text{обратное преобразование Лапласа}} \end{array} & L_2(j\mathbb{R}) \\
 \downarrow P_- & & \downarrow P_- \\
 L_2(-\infty, 0] & \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{прямое преобразование Лапласа}} \\ \xrightarrow{\text{обратное преобразование Лапласа}} \end{array} & H_2^\perp
 \end{array}$$

Здесь отображение

$$P_+ : L_2(-\infty, \infty) \rightarrow L_2[0, \infty)$$

такое, что для каждой функции $f(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ имеем

$$g(t) = P_+ f(t),$$

где

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Пространство $L_\infty(j\mathbb{R})$, или просто L_∞ , является банаховым пространством матричных функций с нормой

$$\|F\|_\infty \triangleq \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(F(j\omega)),$$

где $\bar{\sigma}(F(j\omega))$ – максимальное сингулярное значение матрицы $F(j\omega)$.

Сигналы из пространства L_∞ являются сигналами с ограниченной амплитудой.

Пространство H_∞ является замкнутым в L_∞ подпространством ограниченных функций с аналитическим продолжением в правую полуплоскость. Норма на H_∞ задается выражением

$$\|F\|_\infty \triangleq \sup_{\operatorname{Re}(s) > 0} \bar{\sigma}(F(s)) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(F(j\omega)).$$

Пространство H_∞^- является замкнутым подпространством в L_∞ ограниченных функций с аналитическим продолжением в левую полуплоскость. Норма на H_∞^- определяется как

$$\|F\|_\infty \triangleq \sup_{\operatorname{Re}(s) < 0} \bar{\sigma}(F(s)) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(F(j\omega)).$$

Вычисление норм в L_2 и H_2 . Пусть $G(s) \in L_2$, тогда, согласно (35),

$$\begin{aligned} \|G\|_2 &\triangleq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{tr}(G^*(j\omega)G(j\omega)) d\omega} = \\ &= \|g(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{tr}(g^*(t)g(t)) dt}. \end{aligned}$$

С другой стороны, при самых общих предположениях, в соответствии с (36),

$$\begin{aligned}\|G\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{tr} \left(G^*(j\omega)G(j\omega) \right) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \operatorname{tr} \left(\widehat{G}(s)G(s) \right) ds.\end{aligned}$$

Пусть

$$G(s) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & I_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI_n - A & 0 & -B \\ -C & I_p & -D \\ 0 & 0 & I_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{pmatrix} \quad (38)$$

и A – гурвицева матрица, тогда

$$\|G\|_2^2 = \operatorname{tr} \left(B^*QB \right) = \operatorname{tr} \left(CPC^* \right), \quad (39)$$

где P и Q – соответственно матрицы управляемости и наблюдаемости [11], т.е. решения следующих матричных уравнений Ляпунова:

$$AP + PA^* + BB^* = 0, \quad (40)$$

$$A^*Q + QA + C^*C = 0. \quad (41)$$

Таким образом, можно утверждать, что если выполняется (38), то выполняется и следующее равенство:

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & I_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI_n - A & 0 & -B \\ -C & I_p & -D \\ 0 & 0 & I_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \operatorname{tr} \left(B^*QB \right) = \operatorname{tr} \left(CPC^* \right).$$

В практических приложениях норма H_2 используется для сигналов с ограниченным спектром.

Для вычисления нормы $G(s) \in \mathbb{R}L_2$, т.е. нормы передаточной матрицы с действительными коэффициентами, используется следующий подход. Пусть

$$G(s) = [G(s)]_+ + [G(s)]_-,$$

где $G_+ \in \mathbb{R}H_2$, $G_- \in \mathbb{R}H_2^\perp$, тогда

$$\|G(s)\|_2^2 = \|[G(s)]_+\|_2^2 + \|[G(s)]_-\|_2^2.$$

При этом

$$\|[G(s)]_+\|_2$$

и

$$\|[G(s)]_-\|_2 = \|[G(-s)]_+\|_2 = \|\widehat{[G(s)]_-}\|_2$$

могут быть вычислены на основе (39) – (41).

В практических приложениях норма H_2 используется для сигналов с ограниченным спектром.

Вычисление норм в L_∞ и H_∞ . Пусть $G(s) \in \mathbb{R}L_\infty$ и

$$\|G\|_\infty \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)).$$

Для некоторого $\gamma > 0$ и

$$G(s) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \in \mathbb{R}L_\infty$$

норма

$$\|G\|_\infty < \gamma$$

тогда и только тогда, когда гамильтониан

$$\Gamma \triangleq \begin{pmatrix} A + BR^{-1}D^*C & BR^{-1}D^*C \\ -C^*(I_n + DR^{-1}D^*)C & -(A + BR^{-1}D^*C) \end{pmatrix}$$

$$R = \gamma^2 I_n - D^*D,$$

не имеет собственных значений на мнимой оси.

Следующие условия оказываются эквивалентными:

- 1) $\|G(j\omega)\|_\infty < \gamma$;
- 2) $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ и Γ не имеет собственных значений на мнимой оси;
- 3) $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ и $\Gamma \in \text{dom}(Ric)$;

4) $\bar{\sigma}(D) < \gamma$, $\Gamma \in \text{dom}(\text{Ric})$ и $\text{Ric}(\Gamma) > 0$, если пара матриц (C, A) наблюдаема.

Для численного определения $\|F\|_\infty$ выбирают некоторое положительное число γ , вычисляют собственные значения гамильтоновой матрицы Γ и определяют, выполняется ли неравенство $\|F\|_\infty < \gamma$. Затем уменьшают или увеличивают γ до тех пор, пока не будет достигнута желаемая точность.

Норма Харди H_∞ применяется к сигналам с ограниченной мощностью.

Алгебраическое уравнение Ляпунова. Способ проверки системы (1) на устойчивость, управляемость и наблюдаемость непосредственно вытекает из общей теории функций Ляпунова, а точнее, из теории алгебраических уравнений Ляпунова. Рассмотрим следующее алгебраическое уравнение Ляпунова (АУЛ):

$$A^*Q + QA + H = 0, \quad (42)$$

где Q, H – заданные действительные матрицы.

Известно, что уравнение (42) имеет единственное решение, если и только если собственные значения матрицы A удовлетворяют неравенству

$$\lambda_i(A) + \lambda_j^*(A) \neq 0, \quad \forall i, j.$$

Предположим, что матрица A устойчива, тогда:

$$1) Q = \int_0^\infty e^{A^*t} H e^{At} dt;$$

$$2) Q > 0, \text{ если } H > 0, \text{ и } Q \geq 0, \text{ если } H \geq 0;$$

3) $H \geq 0$ и (H, A) является наблюдаемой парой, если и только если $Q > 0$.

Далее, если Q – решение уравнения (42), тогда справедливы следующие утверждения:

$$4) \text{Re } \lambda_i(A) \leq 0, \text{ если } Q > 0 \text{ и } H \geq 0;$$

$$5) \text{ матрица } A \text{ устойчива, если } Q > 0 \text{ и } H > 0;$$

6) матрица A устойчива, если $Q \geq 0, H \geq 0$ и пара (H, A) детектируемая.

Сбалансированная реализация. Пусть

$$G(s) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

не обязательно устойчивая реализация передаточной матрицы $G(s)$. Предположим, что существует симметрическая матрица

$$P = P^* = \begin{pmatrix} P' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с невырожденной блок-матрицей P' такая, что

$$AP + PA^* + BB^* = 0.$$

Пусть также $G(s)$ имеет реализацию

$$\left(\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right).$$

Тогда

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right)$$

также является реализацией $G(s)$. Более того, пара матриц (A_{11}, B_1) является управляемой, если A_1 – устойчивая.

Дуально можно высказать следующее утверждение. Предположим, что существует симметрическая матрица

$$Q = Q^* = \begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с невырожденным блоком Q' , удовлетворяющая уравнению

$$A^*Q + QA + C^*C = 0.$$

Тогда

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right)$$

также является реализацией $G(s)$. Кроме того, пара (C_1, A_{11}) является наблюдаемой, если, как и прежде, матрица A_1 устойчива.

Пусть далее грамиан управляемости $P \geq 0$. Выполняя диагонализацию (факторизацию) P в форме

$$P = (U_1 \ U_2) \begin{pmatrix} \Lambda' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (U_1 \ U_2)^*, \quad \Lambda' > 0, \\ (U_1 \ U_2)(U_1 \ U_2)^* = I,$$

можно получить управляемую реализацию $G(s)$ вида

$$\left(\begin{array}{c|c} U_1^* A U_1 & U_1^* B \\ \hline C U_1 & D \end{array} \right).$$

Дуально, пусть грамиан наблюдаемости $Q \geq 0$ и справедлива следующая факторизация Q :

$$Q = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}^*, \quad \Lambda' > 0, \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}^* = I.$$

Тогда наблюдаемая реализация $G(s)$ имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c} V_1 A V_1^* & V_1 B \\ \hline C V_1^* & D \end{array} \right).$$

Минимальная реализация (т.е. управляемая и наблюдаемая) линейной системы называется сбалансированной, если решения алгебраических уравнений (40), (41) совпадают: $P = Q$.

Вычисление сбалансированной реализации связано со следующей процедурой:

- а) вычисляются грамианы управляемости и наблюдаемости $P > 0, Q > 0$;
- б) ищется разложение грамиана управляемости P в виде $P = R^* R$;

в) диагонализуется произведение $RQR^* = U\Sigma^2U^*$;

г) задается $T^{-1} = R^*U\Sigma^{-\frac{1}{2}}$, тогда $TPT^* = (T^*)^{-1}QT^{-1} = \Sigma$ и реализация

$$\left(\begin{array}{c|c} TAT^{-1} & TB \\ \hline CT^{-1} & D \end{array} \right)$$

является сбалансированной.

Предположим, что $G(s) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \in \mathbb{RH}_\infty$ – сбалансированная реализация такая, что

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1 I_{s_1}, \sigma_2 I_{s_2}, \dots, \sigma_N I_{s_N}),$$

$\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_N \geq 0$ – упорядоченные сингулярные числа и

$$A\Sigma + \Sigma A^* + BB^* = 0, \quad A^*\Sigma + \Sigma A + C^*C = 0.$$

Тогда справедливы следующие неравенства, носящие фундаментальный характер:

$$\sigma_1 \leq \|G\|_\infty \leq \int_0^\infty \|g(t)\| dt \leq 2 \sum_{i=1}^N \sigma_i.$$

Алгебраическое уравнение Риккати. Пусть A , Q и R – действительные $n \times n$ матрицы, при этом Q , R – симметрические. Тогда алгебраическим уравнением Риккати (АУР) называется следующее матричное уравнение:

$$A^*X + XA + XRX + H = 0. \quad (43)$$

АУР (43) может быть ассоциировано с $2n \times 2n$ гамильтоновой матрицей

$$\Gamma \triangleq \begin{pmatrix} A & R \\ -H & -A^* \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Известно [12, 13], что спектр матрицы Γ располагается симметрично относительно мнимой оси. Действительно, если ввести в рассмотрение косимметрическую матрицу

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

с очевидным свойством

$$J^2 = -I,$$

тогда оказывается, что

$$J^{-1}\Gamma J = -\Gamma J = -\Gamma^*$$

и матрицы Γ и $-\Gamma^*$ – унитарно подобные [17]. Из этого следует, что комплексное число λ является собственным значением гамильтоновой матрицы Γ , если и только если собственным значением гамильтоновой матрицы является число $-\lambda^*$.

Оператор Риккати. Предположим, что Γ не имеет собственных значений на мнимой оси. Тогда имеется ровно n собственных значений с $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ и ровно n собственных значений с $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$. Сформируем два n -мерных подпространства $X_-(\Gamma)$ и $X_+(\Gamma)$, соответствующих собственным значениям в $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ и $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$. Известно, что эти подпространства являются инвариантными (точнее, Γ -инвариантными), тогда, например, подпространство $X_-(\Gamma)$ может быть представлено в следующем виде:

$$X_-(\Gamma) = \operatorname{Im} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix},$$

где $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – базисные векторы, записанные в виде матрицы, линейной оболочкой которых является $X_-(\Gamma)$. В соответствии с теоремой Шура об унитарной триангуляризации, имеет место равенство

$$\Gamma \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} T, \quad \operatorname{Re} \lambda_i(T) < 0 \quad \forall i.$$

Если матрица X_1 невырождена, т.е. базис по строкам и столбцам является полным, или, что то же самое, если следующие два подпространства:

$$X_-(\Gamma), \operatorname{Im} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

являются взаимно дополняющими, то можно положить

$$X = X_2 X_1^{-1}.$$

В этом случае матрица X единственным образом определяется матрицей Γ и $\Gamma \rightarrow X$ – оператор Риккати, который обозначается через Ric . При этом имеет место равенство

$$X = Ric(\Gamma).$$

Область определения оператора Риккати обозначается через $\operatorname{dom}(Ric)$ и состоит из всех гамильтоновых матриц, обладающих следующими двумя свойствами:

- матрица Γ не имеет собственных значений на мнимой оси;
- подпространства (45) являются взаимно дополняющими.

Оператор Риккати действует на множестве $2n \times 2n$ действительных матриц

$$Ric : \operatorname{dom}(Ric) \subset \mathbb{R}^{2n \times 2n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n},$$

каждая из которых имеет симметричный относительно мнимой оси спектр и является невырожденной:

$$\det \begin{pmatrix} A & R \\ -H & -A^* \end{pmatrix} \neq 0.$$

Эти свойства оператора Риккати определяются как устойчивость и дополняемость.

Свойства оператора Риккати. Пусть Γ не имеет собственных значений на мнимой оси, пусть также симметрическая матрица положительно $R \geq 0$ или отрицательно $R \leq 0$ полуопределена, пара (A, R) стабилизируема. Тогда

$$\Gamma \in \text{dom}(\text{Ric}) .$$

Пусть $\Gamma \in \text{dom}(\text{Ric})$ и $X \in \text{Ric}(\Gamma)$, тогда:

- 1) X – эрмитова матрица;
- 2) X удовлетворяет АУР (43);
- 3) $A + RX$ – гурвицева матрица.

Допустим, что гамильтонова матрица имеет вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A & -BB^* \\ -C^*C & -A^* \end{pmatrix},$$

а пара матриц (A, B) стабилизируема и

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A - j\omega I_n \\ C \end{pmatrix} = n \quad \forall \omega .$$

Тогда

$$\Gamma \in \text{dom}(\text{Ric})m, \quad X \in \text{Ric}(\Gamma) \geq 0 ,$$

и

$$\text{Ker}(X) \in \chi ,$$

где χ – устойчивое ненаблюдаемое подпространство. Последнее означает, что матрица X имеет собственные значения в начале комплексной плоскости и гамильтонова матрица теряет свойство обратимости:

$$\det \begin{pmatrix} A & R \\ -H & -A^* \end{pmatrix} = 0 .$$

Связь операторов сжатия и Риккати. Определим гамильтонову матрицу, соответствующую реализации

$$G(s) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right),$$

в виде

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A + BR^{-1}D^*C & BR^{-1}D^*C \\ -C^*(I_n + DR^{-1}D^*)C & -(A + BR^{-1}D^*C) \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$R = I_n - D^* D.$$

Имеет место следующий результат. Пусть максимальное сингулярное значение матрицы D $\bar{\sigma}(D) < 1$, тогда следующие условия являются эквивалентными [12]:

- 1) $\|G(j\omega)\|_\infty < 1$ (G – оператор сжатия);
- 2) Γ не имеет собственных значений на мнимой оси;
- 3) $\Gamma \in \text{dom}(\text{Ric})$;
- 4) $\Gamma \in \text{dom}(\text{Ric})$ и $\text{Ric}(\Gamma) \geq 0$ ($\text{Ric}(\Gamma) > 0$, если пара (A, R) управляемая).

Поясним приведенный результат в отношении первых двух условий. Рассмотрим следующее соединение систем:

$$I - G^* G.$$

Ему можно сопоставить системную матрицу

$$(I - G^* G)(s) = \left(\begin{array}{cc|c} A & 0 & -B \\ -C^T C & -A^T & C^T D \\ \hline D^T C & B^T & I_n - D^T D \end{array} \right). \quad (47)$$

Из этого непосредственно следует система дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C^T C & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B \\ C^T D \end{pmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} D^T C & B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (I_n - D^T D) u(t).$$

Гамильтонова матрица из (47)

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -C^T C & -A^T \end{pmatrix}$$

является так называемой A -матрицей для передаточной матрицы

$$(I - G^*G)^{-1}(s),$$

т.е. занимает то же место в формуле обращения, что и матрица A в формуле (2). Таким образом, реализация (47) не имеет неуправляемых и ненаблюдаемых мод на мнимой оси тогда и только тогда, когда $(I - G^*G)^{-1}(s)$ не имеет полюсов на мнимой оси, т.е.

$$(I - G^*G)^{-1}(s) \in \mathbb{RL}_\infty.$$

Для доказательства эквивалентности первых двух условий достаточно доказать, что

$$\|G(j\omega)\|_\infty < 1 \Leftrightarrow (I - G^*G)^{-1}(s) \in \mathbb{RL}_\infty.$$

Если $\|G(j\omega)\|_\infty < 1$, следовательно, $I - G^*(j\omega)G(j\omega) > 0$ и, значит, $(I - G^*G)^{-1}(s) \in \mathbb{RL}_\infty$. Если $\|G(j\omega)\|_\infty \geq 1$, следовательно, $\bar{\sigma}[G(j\omega)] = 1$ для некоторого значения ω и 1 – собственное значение эрмитовой матрицы $G^*(j\omega)G(j\omega)$, т.е.

$$\det(I - G^*G) = 0,$$

и $I - G^*G$ – сингулярна, что и доказывает эквивалентность первых двух условий.

Стабилизирующие решения. Следующий результат непосредственно связан с проблемой H_∞ [12].

Пусть $\gamma > 0$,

$$G(s) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \in \mathbb{RH}_\infty$$

и

$$\Gamma = \left(\begin{array}{cc} A + BR^{-1}D^*C & BR^{-1}D^*C \\ -C^*(I_n + DR^{-1}D^*)C & -(A + BR^{-1}D^*C) \end{array} \right),$$

$$R = \gamma^2 I_n - D^* D,$$

тогда, наряду с уже приведенными условиями, следующие условия эквивалентны:

- 1) $\|G(j\omega)\|_\infty < \gamma$;
- 2) $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ и Γ не имеет собственных значений на мнимой оси;
- 3) $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ и $\Gamma \in \text{dom}(\text{Ric})$;
- 4) $\bar{\sigma}(D) < \gamma$, $\Gamma \in \text{dom}(\text{Ric})$ и $\text{Ric}(\Gamma) > 0$, если пара матриц (C, A) наблюдаема;
- 5) $\bar{\sigma}(D) < \gamma$, если существует $X \geq 0$ такое, что

$$X(A + BR^{-1}D^*C) + (A + BR^{-1}D^*C)^*X + XBR^{-1}B^*X + C^*(I + DR^{-1}D^*)C = 0$$

и матрица

$$A + BR^{-1}D^*C + BR^{-1}B^*X$$

не имеет собственных значений на мнимой оси;

- 6) $\bar{\sigma}(D) < \gamma$, если существует $X > 0$ такое, что

$$X(A + BR^{-1}D^*C) + (A + BR^{-1}D^*C)^*X + XBR^{-1}B^*X + C^*(I + DR^{-1}D^*)C < 0;$$

- 7) существует $X > 0$ такое, что

$$\begin{pmatrix} XA + A^*X & XB & C^* \\ B^*X & -\gamma I & D^* \\ C & D & -\gamma I \end{pmatrix} < 0.$$

Предположим теперь, что задана матрица Γ в форме

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A & -BB^* \\ -C^*C & -A^* \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Gamma \in \text{dom}(\text{Ric}),$$

если и только если пара матриц (A, B) стабилизируема и (C, A) не имеет ненаблюдаемых мод на мнимой оси. Более того,

$$X = Ric(\Gamma) \geq 0, \quad \text{Ker}(X) = 0,$$

если (C, A) не имеет устойчивых ненаблюдаемых мод.

В предположении, что пара (A, B) – стабилизируемая, а пара (C, A) – детектируемая, АУР

$$A^* X + XA - XBB^* X + C^* C = 0$$

имеет единственное положительно определенное решение. Более того, это решение является стабилизирующим.

Если матрица D имеет полный столбцовый ранг и $R = D^* D > 0$, тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) матрица

$$\begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

имеет полный столбцовый ранг для любых ω ;

2) пара матриц

$$\left((I_n - DR^{-1}D^*), A - BR^{-1}D^*C \right)$$

не имеет ненаблюдаемых мод на мнимой оси.

Унитарные функции. Прямоугольная матричная функция N называется унитарно обратимой слева, если $N \in \mathbb{R}H_\infty$ и $\hat{N}N = I$. Прямоугольная матричная функция N называется унитарно обратимой справа, если $N \in \mathbb{R}H_\infty$ и $N\hat{N} = I$. Квадратная матричная функция N называется пассивной, если $N \in \mathbb{R}L_\infty$, $\hat{N}N = I$ и, следовательно, $NN\hat{N} = I$.

Предположим, что

$$N(s) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}H_\infty \tag{48}$$

и

$$A^* X + XA + C^* C = 0.$$

Тогда справедливы следующие импликации:

$$1) D^*C + B^*X = 0 \Rightarrow \hat{N}N = D^*D;$$

$$2) \text{если пара } (A, B) \text{ – управляемая и } \hat{N}N = D^*D \Rightarrow D^*C + B^*X = 0.$$

Если реализация (48) устойчивая и минимальная и X есть грамиан наблюдаемости, тогда N унитарно обратимая слева, если и только если:

$$3) D^*C + B^*X = 0;$$

$$4) D^*D = I.$$

Наконец определим ортогональное дополнение N_{\perp} матричной функции N . Если выполняется тождество

$$CX^+X = C,$$

где X^+ – псевдообратная по Муру-Пенроузу матрица при $X \geq 0$ ($X^+ = X^{-1}$ при $X > 0$), тогда N_{\perp} имеет реализацию

$$N_{\perp} = \begin{pmatrix} A & -X^+C^*D_{\perp} \\ C & D_{\perp} \end{pmatrix}.$$

Здесь D_{\perp} – ортогональное дополнение D , при котором матрица $\begin{pmatrix} D & D_{\perp} \end{pmatrix}$ – квадратная и обратимая.

Локализация систем в форме неравенств. Введем формально следующее неравенство:

$$\beta(s)\Omega^{-1}(s)\alpha(s)\Big|_{\Theta} \leq \omega(s)\Big|_{\Theta}, \quad (49)$$

где

$$\Omega = \begin{pmatrix} sI_n - A & 0 & -B \\ -C & I_p & -D \\ 0 & 0 & I_m \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I_p & 0 \end{pmatrix}; \quad (50)$$

$$\omega(s) = \left(\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right); \quad (51)$$

символ $\cdot\Big|_{\Theta}$ обозначает признак (критерий), по которому происходит сравнение.

Отметим, что матрицы (49) могут отличаться от приведенных в формулах (50) и (51). Например, вместо проматрицы

$$\Omega = \begin{pmatrix} sI_n - A & 0 & -B \\ -C & I_p & -D \\ 0 & 0 & I_m \end{pmatrix}$$

может быть использована проматрица

$$\Omega = \begin{pmatrix} sI_n - A - BF & 0 & -B \\ -C & I_p & -D \\ 0 & 0 & I_m \end{pmatrix}, \quad (52)$$

где явно указано влияние обратной связи $u = BFx$, или любая другая проматрица из [2, 4, 7] и т.д.

Неравенство (49) может быть истолковано в зависимости от введенного признака Θ . Так, если $\Theta = H_\infty$ и

$$\beta(s)\Omega^{-1}(s)\alpha(s) \in \mathbb{R}L_\infty, \quad \omega(s) \in \mathbb{R}L_\infty,$$

то неравенство

$$\beta(s)\Omega^{-1}(s)\alpha(s)\Big|_{H_\infty} \leq \omega(s)\Big|_{H_\infty} \quad (53)$$

означает, что

$$\|\beta\Omega^{-1}\alpha\|_\infty \leq \|\omega\|_\infty,$$

при этом

$$\|\beta\Omega^{-1}\alpha\|_\infty < \gamma_1, \quad \|\omega\|_\infty < \hat{\gamma}.$$

Здесь

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A + BR^{-1}D^*C & BR^{-1}D^*C \\ -C^*(I_n + DR^{-1}D^*)C & -(A + BR^{-1}D^*C) \end{pmatrix},$$

$$R = \gamma^2 I_n - D^*D,$$

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \hat{A} + \hat{B}\hat{R}^{-1}\hat{D}^*\hat{C} & \hat{B}\hat{R}^{-1}D^*\hat{C} \\ -\hat{C}^*(I_n + \hat{D}\hat{R}^{-1}\hat{D}^*)C & -(\hat{A} + \hat{B}\hat{R}^{-1}\hat{D}^*\hat{C}) \end{pmatrix}, \hat{R} = \gamma^2 I_n - \hat{D}^*\hat{D}.$$

Если рассматривается неравенство ($\Theta = H_2$)

$$\beta(s)\Omega^{-1}(s)\alpha(s)\Big|_{H_2} \leq \omega(s)\Big|_{H_2} \quad (54)$$

и матрицы A и \hat{A} соответственно в (50) и (51) – гурвицевы, тогда

$$\|\beta\Omega^{-1}\alpha\|_2 \leq \|\omega\|_2, \quad (55)$$

где

$$\|\beta\Omega^{-1}\alpha\|_2^2 = \text{tr}(B^*QB) = \text{tr}(CPC^*), \quad (56)$$

$$\|\omega\|_2^2 = \text{tr}(\hat{B}^*\hat{Q}\hat{B}) = \text{tr}(\hat{C}\hat{P}\hat{C}^*). \quad (57)$$

В (56) P и Q – решения АУЛ

$$\begin{aligned} AP + PA^* + BB^* &= 0, \\ A^*Q + QA + C^*C &= 0, \end{aligned}$$

а \hat{P} и \hat{Q} в (57) – решения АУЛ

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{P} + \hat{P}\hat{A}^* + \hat{B}\hat{B}^* &= 0, \\ \hat{A}^*\hat{Q} + \hat{Q}\hat{A} + \hat{C}^*\hat{C} &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что неравенство (49) при

$$\omega(s) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

и любых Θ превращается в строгое равенство, поскольку, согласно (15), тривиально выполняется условие локализации по Кону произвольного образа (33).

Из предыдущего ясно, что в (49) не обязательно должны совпадать внутренние и внешние размерности матриц $\beta \Omega^{-1} \alpha$ и ω . Более того, введенное неравенство может быть истолковано гораздо шире.

Пусть \mathcal{K} – поле скаляров. Рассмотрим поле рациональных функций $\mathcal{K}(s)$ от переменной s над полем \mathcal{K} . Элементы этого поля будем соотносить с передаточными функциями. Обозначим через $\mathcal{K}[s]$ кольцо полиномов от переменной s , лежащее в поле $\mathcal{K}(s)$. Будем рассматривать подкольца \mathcal{O} поля $\mathcal{K}(s)$, в определенном смысле обобщающие кольцо $\mathcal{K}[s]$ [23, 24].

Примерами колец, которые здесь имеются в виду, служат:

– кольцо устойчивых (stable) передаточных функций из $\mathbb{C}(s)$

$$\mathcal{O}_{stab} = \left\{ \frac{b(s)}{a(s)} \mid \operatorname{Re}(s) < 0, \text{ если } a(s) = 0 \right\}; \quad (58)$$

– кольцо собственных (proper) передаточных функций из $\mathbb{C}(s)$

$$\mathcal{O}_{pr} = \left\{ \frac{b(s)}{a(s)} \mid \deg a(s) \geq \deg b(s) \right\}; \quad (59)$$

– кольцо строго собственных (strictly proper) передаточных функций из $\mathbb{C}(s)$

$$\mathcal{O}_{str} = \left\{ \frac{b(s)}{a(s)} \mid \deg b(s) = \deg a(s) \right\}; \quad (60)$$

– кольцо несобственных (improper) или некаузальных передаточных функций из $\mathbb{C}(s)$

$$\mathcal{O}_{imp} = \left\{ \frac{b(s)}{a(s)} \mid \deg a(s) < \deg b(s) \right\}. \quad (61)$$

Сосредоточим внимание на подкольцах \mathcal{O} в $\mathcal{K}(s)$, содержащих поле \mathcal{K} и таких, что каждая рациональная функция из $\mathcal{K}(s)$ является отношением элементов из \mathcal{O} . Эти кольца единообразно описываются в терминах

нормирований поля $\mathcal{K}(s)$. В комплексном случае нормирование поля $\mathbb{C}(s)$ соответствует точкам римановой сферы, т.е. всем комплексным числам и одной бесконечно удаленной точке. Нормирование, соответствующее точке, определяет нули и полюсы рациональной функции в этой точке. Формулы (59) – (61) задают нормирование поля $\mathbb{C}(s)$ «в бесконечности». Кольца нормирования можно рассматривать как атомы, из которых можно строить более сложные кольца передаточных функций.

Для произвольного поля \mathcal{K} множество всех нормирований поля $\mathcal{K}(s)$ описывается сложнее, но все-таки может быть указано явно. Нормирование «в бесконечности» определяется точно так же, как в комплексном случае, а именно:

$$\text{ord}_\infty \left(\frac{b(s)}{a(s)} \right) = \deg a(s) - \deg b(s) \quad (62)$$

для любой рациональной передаточной функции

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}, \quad (63)$$

где $a(s)$ и $b(s)$ – полиномы из $\mathcal{K}[s]$.

Рассмотрим теперь неравенство (49) в виде

$$\beta(s)\Omega^{-1}(s)\alpha(s) \Big|_{\text{ord}_\infty} \leq \omega(s) \Big|_{\text{ord}_\infty}, \quad \omega(s) = \frac{b(s)}{a(s)}. \quad (64)$$

Согласно (62) и условию локализации по Кону скалярного образа (27), получаем

$$\deg \det \Omega(s) - \deg \det \begin{pmatrix} \Omega(s) & -\alpha(s) \\ \beta(s) & 0 \end{pmatrix} \leq \deg a(s) - \deg b(s),$$

т.е. при нормировании «на бесконечности» рациональная функция

$$\beta(s)\Omega^{-1}(s)\alpha(s) \quad (65)$$

¹ Ord – порядковое значение.

имеет порядковое значение, меньшее или равное порядковому значению рациональной функции $\alpha(s)$.

«Конечные» нормирования находятся во взаимно однозначном отношении с неприводимыми полиномами из $\mathcal{K}[s]$. Если $q(s)$ – неприводимый полином, то соответствующее ему нормирование определяется следующим образом.

Разложим рациональную функцию (63) из $\mathcal{K}(s)$ на множители

$$G(s) = q(s)^n \frac{b'(s)}{a'(s)}, \quad (66)$$

где $n \in \mathbb{Z}$ (положительное целое число, отрицательное целое число или нуль); $a'(s)$ и $b'(s)$ – взаимно простые с $q(s)$ полиномы.

Тогда

$$\text{ord } G(s) = n. \quad (67)$$

Если

$$\text{deg } q(s) = d,$$

то будем говорить, что соответствующее нормирование имеет степень d . Степень нормирования в бесконечности полагают равной единице.

В случае нормирования на бесконечности неравенство

$$\beta(s)\Omega^{-1}(s)\alpha(s)\Big|_{\text{ord}} \leq \omega(s)\Big|_{\text{ord}} \quad (68)$$

означает, что степень нормирования (65) меньше либо равна степени нормирования $\omega(s)$.

Если ν – произвольное нормирование поля $\mathcal{K}(s)$, то соответствующее ему кольцо нормирования задается как

$$\mathcal{O}_\nu = \{G(\lambda) \in \mathcal{K}(s) \mid \text{ord}_\nu G(s) \geq 0\}, \quad (69)$$

т.е. \mathcal{O}_ν – множество всех рациональных функций, не имеющих полюсов в ν .

Каждое кольцо нормирования \mathcal{O}_ν содержит поле \mathcal{K} , а его поле частных есть все поле рациональных функций $\mathcal{K}(s)$. Единицами (об-

ратимыми элементами) кольца \mathcal{O}_v являются такие рациональные функции $f(s)$ из $\mathcal{K}(s)$, что

$$\text{ord}_v f(s) = 0. \quad (70)$$

Множество всех необратимых элементов кольца \mathcal{O}_v

$$\mathcal{M}_v = \{G(s) \in \mathcal{O}_v \mid \text{ord}_v G(s) > 0\} \quad (71)$$

образует единственный максимальный идеал в \mathcal{O}_v , и поэтому кольцо \mathcal{O}_v является локальным.

Таким образом, неравенство

$$\beta(s)\Omega^{-1}(s)\alpha(s)\Big|_{\text{ord}_v} \leq \omega(s)\Big|_{\text{ord}_v}, \quad \omega(s) = \frac{b(s)}{a(s)}, \quad (72)$$

будет означать сравнение (65) и $\omega(s)$ при произвольном нормировании v поля $\mathcal{K}(s)$.

В заключение отметим, что признак Θ может содержать несколько критериев сравнения. Пусть, например,

$$\beta(s)\Omega^{-1}(s)\alpha(s)\Big|_{\text{ord}_\infty, H_2} \leq \omega(s)\Big|_{\text{ord}_\infty, H_2}, \quad \omega(s) = \frac{b(s)}{a(s)}. \quad (73)$$

Тогда одновременно должны выполняться следующие два неравенства:

$$\deg \det \Omega(s) - \deg \det \begin{pmatrix} \Omega(s) & -\alpha(s) \\ \beta(s) & 0 \end{pmatrix} \leq \deg a(s) - \deg b(s)$$

и

$$\|\beta\Omega^{-1}\alpha\|_2 \leq \|\omega\|_2.$$

Другими словами, неравенство (73) означает одновременное выполнение сравнения при нормировании поля $\mathcal{K}(s)$ на бесконечности и стандартных норм в H_2 .

Библиографический список

1. **Осетинский, Н.Н.** Обзор некоторых результатов и методов в современной теории линейных систем / Н.Н. Осетинский // Теория систем. Математические методы и моделирование. – М.: Мир, 1989. – С. 328 – 379.
2. **Рябченко, В.Н.** Сравнение подходов к анализу и синтезу линейных динамических систем // Вестник ИГЭУ. – 2001. – Вып. 3. – С. 169 – 190.
3. **Рябченко, В.Н.** О формировании классов законов линейного управления / В.Н. Рябченко // Вестник ИГЭУ. – 2001. – Вып. 4. – С. 181 – 188.
4. **Рябченко, В.Н.** Представление динамических систем в форме проматрицы / В.Н. Рябченко // Вестник ИГЭУ. – 2001. – Вып. 3. – С. 190 – 197.
5. **Рябченко, В.Н.** Вложение динамических систем в скалярные образы / В.Н. Рябченко // Вестник ИГЭУ. – 2001. – Вып. 3. – С. 197 – 205.
6. **Рябченко, В.Н.** Определение запаса устойчивости на основе вложения систем / В.Н. Рябченко // Вестник ИГЭУ. – 2001. – Вып. 3. – С. 206 – 210.
7. **Рябченко, В.Н.** Синтез регуляторов на основе вложения систем / В.Н. Рябченко // Вестник ИГЭУ. – 2001.
8. **Рябченко, В.Н.** Вложение динамических систем в произвольные образы / В.Н. Рябченко // Вестник ИГЭУ. – 2001. – Вып. 4. – С. 201 – 207.
9. **Рябченко, В.Н.** Синтез линейного управления на основе вложения систем / В.Н. Рябченко // Вестник ИГЭУ. – 2001. – Вып. 4. – С. 192 – 201.
10. **Рябченко, В.Н.** О синтезе нерегулярных законов управления / В.Н. Рябченко // Вестник ИГЭУ. – 2001. – Вып. 4. – С. 207 – 213.
11. **Kailath, T.** Linear Systems. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1980.
12. **Essentials of robust control** / К. Zhou. – Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1998.
13. **Поляк, Б.Т.** Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. – М.: Наука, 2002.
14. **Мисриханов, М.Ш.** Ленточные критерии управляемости и наблюдаемости / М.Ш. Мисриханов // АиТ. – 2005. – № 12. – С. 93 – 104.
15. **Мисриханов, М.Ш.** Инвариантное управление многомерными системами. Алгебраический подход / М.Ш. Мисриханов. – М.: Энергоатомиздат, 2003.
16. **Гантмахер, Ф.Р.** Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988.
17. **Воеводин, В.В.** Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984.
18. **Rosenbrock, H.H.** State-space and multivariable theory / H.H. Rosenbrock. – The Nelson and Sons. Ltd., 1970.
19. **Смагина, Е.М.** Вопросы анализа линейных многомерных объектов с использованием понятия нуля системы / Е.М. Смагина. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1990.
20. **Кон, П.** Свободные кольца и их связи / П. Кон. – М.: Мир, 1975.
21. **A prime matrix ideal yields a skew field** / P. Malcolmson // J. London Math. Soc. – 1978. (2). 18. – P. 221 – 233.
22. **Weakly finite matrix localization** / P. Malcolmson // J. London Math. Soc. – 1993. – V. 2. – No 48. – P. 31 – 38.
23. **Наймарк, М.А.** Нормированные кольца / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1968.
24. **Уимен, Б.** Локальная и глобальная теории линейных систем / Б. Уимен, Дж. Конте, М.А. Пердон // Теория систем. Математические методы и моделирование. – М.: Мир. 1989. – С. 296 – 315.

УДК 519.6

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ИНВАРИАНТНОГО УПРАВЛЕНИЯ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННЫХ ПУЧКОВ МАТРИЦ

М.Ш. Мисриханов, д-р техн. наук, В.Н. Рябченко, д-р физ.-мат. наук

Введение. В управлении теория инвариантности объединяет методы и средства достижения инвариантности (независимости) одной или части координат системы при помощи подбора параметров (или путем изменения структуры) этой системы. Задачи инвариантности возникают тогда, когда необходимо компенсировать возмущающие факторы, нарушающие условия нормальной работоспособности различных устройств.

Возникновение идей инвариантности связывают с именем профессора Г.В. Щипанова. В его работах (в 2008 г. исполняется 80 лет с начала их публикаций) устанавливается количественная связь между параметрами системы и реакцией этой системы на внешние воздействия [1, 2]. Такая постановка непосредственно вытекала из работ академика А.Н. Крылова. Дальнейшее развитие теории инвариантности связано с именем академика Н.Н. Лузина, который провел фундаментальные математические исследования и разработал «эталонный метод синтеза инвариантных систем». В дальнейшем существенный вклад в развитие теории инвариантности в рамках классической теории автоматического управления внесли такие выдающиеся ученые, как В.С. Кулебакин, Б.Н. Петров, А.Ю. Ишлинский, А.Г. Ивахненко, В.М. Кунцевич, А.И. Кухтенко, В.А. Бесекерский, В.Ю. Рутковский, С.Д. Земляков, Э.М. Солнечный, Г.М. Уланов, П.И. Чинаев, В.Д. Anderson, G. Basile, С.Д. Johnson, G. Marro, A.S. Morse, W.M. Wonham и др. [3]. В результате проблема инвариантности для систем, представимых в форме Коши, решена в полном объеме.

Более сложным классом систем, который возникает в практических задачах управления и не представим в форме Коши, является класс алгебро-дифференциальных систем (АДС) [4]. АДС обычно получаются в результате идеализации разнотемповых физических систем [5]. Ниже излагается новый метод аналитического конструирования регуляторов для алгебро-дифференциальных систем, обеспечивающий этим системам инвариантность к внешним возмущениям.

Условия инвариантности АДС. Будем рассматривать АДС следующего вида:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Fw(t), \\ x(t_0) &= x_0, \quad y(t) = Cx(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $u(t) \in \mathbb{R}^r$ – вектор управляющих воздействий (вектор входа); $y(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор выходных переменных; $w \in \mathbb{R}^p$ – вектор внешних возмущающих воздействий АДС. Считается, что натуральные числа $r, m, p \leq n$. При этом $\text{rank } E < n$.

Предположим, что $u(t) = 0$, и сопоставим АДС (1) обобщенную матрицу Розенброка (обобщенный пучок матриц [7])

$$\left(\begin{array}{c|c} A - \lambda E & F \\ \hline C & 0 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+p)}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Свяжем условие инвариантности АДС к $w \in \mathbb{R}^p$ с условием совместности матричного λ -уравнения

$$\left(\begin{array}{c|c} A - \lambda E & F \\ \hline C & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ w(\lambda) \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

Введем в рассмотрение обратимые матрицы [8]

$$\left(\begin{array}{c} F^+ \\ \hline F_L^\perp \end{array} \right), \quad \left(C^+ \mid C_R^\perp \right).$$

Здесь F^+, C^+ – соответствующие обратные к матрицам F, C ; F_L^\perp, C_R^\perp – левый и правый делители нуля максимального ранга матриц F, C .

Выполним невырожденные преобразования уравнения (2) следующего вида:

$$T_F \left(\begin{array}{c|c} A - \lambda E & F \\ \hline C & 0 \end{array} \right) T_C T_C^{-1} \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ w(\lambda) \end{pmatrix} = 0,$$

где

$$T_B = \left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{c} F^+ \\ F_L^\perp \end{array} \right) & 0 \\ \hline 0 & I_m \end{array} \right), \quad T_C = \left(\begin{array}{c|c|c} (C^+ \mid C_R^\perp) & & 0 \\ \hline & 0 & I_p \end{array} \right).$$

Введем обозначение

$$T_C^{-1} \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ w(\lambda) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} (C^+ \mid C_R^\perp)^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I_p \end{array} \right) \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ w(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1(\lambda) \\ \hat{x}_2(\lambda) \\ w(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Выполняя соответствующие преобразования, получим эквивалентное блочное матричное уравнение

$$\left(\begin{array}{c|c|c} F^+(A-\lambda E)C^+ & F^+(A-\lambda E)C_R^\perp & I_p \\ \hline F_L^\perp(A-\lambda E)C^+ & F_L^\perp(A-\lambda E)C_R^\perp & 0 \\ \hline I_m & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \hat{x}_1(\lambda) \\ \hat{x}_2(\lambda) \\ w(\lambda) \end{pmatrix} = 0$$

или в раскрытом виде

$$\begin{cases} F^+(A-\lambda E)C^+ \hat{x}_1(\lambda) + F^+(A-\lambda E)C_R^\perp \hat{x}_2(\lambda) + w(\lambda) = 0, \\ F_L^\perp(A-\lambda E)C^+ \hat{x}_1(\lambda) + F_L^\perp(A-\lambda E)C_R^\perp \hat{x}_2(\lambda) = 0, \\ \hat{x}_1(\lambda) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Проанализируем полученные соотношения. Поскольку из преобразования

$$\left(\begin{array}{c|c} (C^+ \mid C_R^\perp)^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I_p \end{array} \right) \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ w(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1(\lambda) \\ \hat{x}_2(\lambda) \\ w(\lambda) \end{pmatrix}$$

и рассматриваемого матричного уравнения (3) следует, что $\hat{x}_1(\lambda) = C\hat{x}(\lambda) = 0$, тогда необходимо и достаточно проанализировать только оставшиеся уравнения из системы (3), а именно:

$$\begin{cases} \mathbf{F}^+ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{C}_R^\perp \hat{\mathbf{x}}_2(\lambda) + \mathbf{w}(\lambda) = 0, \\ \mathbf{F}_L^\perp (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{C}_R^\perp \hat{\mathbf{x}}_2(\lambda) = 0 \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{F}_L^\perp (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{C}_R^\perp & 0 \\ \hline \mathbf{F}^+ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{C}_R^\perp & \mathbf{I}_p \end{array} \right) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_2(\lambda) \\ \mathbf{w}(\lambda) \end{pmatrix} = 0. \quad (4)$$

В силу полноты нижнего правого блока (4) для существования нетривиального решения этого уравнения требуется неполнота ранга по столбцам подматрицы

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{F}_L^\perp (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{C}_R^\perp \\ \hline \mathbf{F}^+ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{C}_R^\perp \end{array} \right). \quad (5)$$

Аналитический синтез закона управления АДС. Определим, существует ли управление с обратной связью АДС (1)

$$\mathbf{u}(\lambda) = \mathbf{K}(\lambda) \mathbf{x}(\lambda), \quad (6)$$

обеспечивающее неполноту указанного ранга.

Перепишем (4) с учетом (6):

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{F}_L^\perp (\mathbf{A} + \mathbf{BK}(\lambda) - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{C}_R^\perp & 0 \\ \hline \mathbf{F}^+ (\mathbf{A} + \mathbf{BK}(\lambda) - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{C}_R^\perp & \mathbf{I}_p \end{array} \right) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_2(\lambda) \\ \mathbf{w}(\lambda) \end{pmatrix} = 0. \quad (7)$$

Предположим, что (6) удовлетворяет выдвигаемому требованию, тогда справедлива следующая формула:

$$\hat{\mathbf{x}}_2(\lambda) = \overline{\mathbf{F}_L^\perp (\mathbf{A} + \mathbf{BK}(\lambda) - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{C}_R^\perp} \Big|_R^\perp \boldsymbol{\theta}(\lambda), \quad (8)$$

где $\boldsymbol{\theta}(\lambda)$ – некоторый вектор нужной размерности;

$$\overline{\mathbf{F}_L^\perp (\mathbf{A} + \mathbf{BK}(\lambda) - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{C}_R^\perp} \Big|_R^\perp = \left(\mathbf{F}_L^\perp (\mathbf{A} + \mathbf{BK}(\lambda) - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{C}_R^\perp \right)_R^\perp.$$

Подставим (8) во второе уравнение (7), в результате получим

$$F^+ (A + BK(\lambda) - \lambda E) C_R^\perp \overline{F_L^\perp (A + BK(\lambda) - \lambda E) C_R^\perp} \Big|_R^\perp \theta(\lambda) + w(\lambda) = 0.$$

Очевидно, что для любого вектора $w(\lambda)$ найдется подходящий вектор $\theta(\lambda)$ тогда и только тогда, когда λ -матрица

$$F^+ (A + BK(\lambda) - \lambda E) C_R^\perp \overline{F_L^\perp (A + BK(\lambda) - \lambda E) C_R^\perp} \Big|_R^\perp$$

для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ будет иметь полный ранг по строкам (другими словами, у нее отсутствуют левые собственные векторы).

Найдем сначала правый делитель нуля

$$\overline{F_L^\perp (A + BK(\lambda) - \lambda E) C_R^\perp} \Big|_R^\perp$$

как решение $Z(\lambda)$ уравнения

$$F_L^\perp (A + BK(\lambda) - \lambda E) C_R^\perp Z(\lambda) = 0. \tag{9}$$

Перепишем (9) относительно матрицы $K(\lambda)$:

$$F_L^\perp BK(\lambda) C_R^\perp Z(\lambda) = F_L^\perp (A - \lambda E) C_R^\perp Z(\lambda). \tag{10}$$

Введем в рассмотрение невырожденную матрицу

$$\left(\begin{array}{c} \overline{F_L^\perp B} \Big|_L^\perp \\ \hline \overline{F_L^\perp B} \Big|^+ \end{array} \right), \quad \overline{F_L^\perp B} \Big|^+ = (F_L^\perp B)^+,$$

с помощью которой выполним преобразование (10). При этом, не ограничивая общности, будем считать, что

$$\left(\begin{array}{c} \overline{F_L^\perp B} \Big|_L^\perp \\ \hline \overline{F_L^\perp B} \Big|^+ \end{array} \right) F_L^\perp B = \begin{pmatrix} 0 \\ I_r \end{pmatrix}.$$

В результате преобразований получим

$$\left(\begin{array}{c} \overline{F_L^\perp B} \Big|_L^\perp \\ \hline \overline{F_L^\perp B} \Big|^+ \end{array} \right) F_L^\perp B K(\lambda) C_R^\perp Z(\lambda) = \left(\begin{array}{c} \overline{F_L^\perp B} \Big|_L^\perp \\ \hline \overline{F_L^\perp B} \Big|^+ \end{array} \right) F_L^\perp (A - \lambda E) C_R^\perp Z(\lambda) \quad (11)$$

или, раскрывая (11),

$$\begin{cases} 0 = \overline{F_L^\perp B} \Big|_L^\perp F_L^\perp (A - \lambda E) C_R^\perp Z(\lambda), \\ \mathbf{K}(\lambda) C_R^\perp Z(\lambda) = \overline{F_L^\perp B} \Big|^+ F_L^\perp (A - \lambda E) C_R^\perp Z(\lambda). \end{cases} \quad (12)$$

Из первого уравнения (12) получаем существование решения инвариантного управления АДС

$$\overline{\left(F_L^\perp B \right)_L^\perp F_L^\perp (A - \lambda E) C_R^\perp} \Big|_R^\perp \neq 0. \quad (13)$$

Если (13) выполняется, тогда можно выбрать решение $Z(\lambda)$ в виде

$$Z(\lambda) = \overline{\left(F_L^\perp B \right)_L^\perp F_L^\perp (A - \lambda E) C_R^\perp} \Big|_R^\perp \psi(\lambda),$$

где $\psi(\lambda)$ – любой подходящий вектор.

Поскольку $C_R^\perp Z(\lambda)$ – также вектор, тогда матрицу регулятора $K(\lambda)$ можно аналитически получить из второго уравнения (12):

$$K(\lambda) = \overline{C_R^\perp Z(\lambda)} \Big|^+ \overline{F_L^\perp B} \Big|^+ F_L^\perp (A - \lambda E) C_R^\perp Z(\lambda) + \Phi(\lambda) \overline{C_R^\perp Z(\lambda)} \Big|_R^\perp. \quad (14)$$

Здесь $\Phi(\lambda)$ – произвольная λ -матрица подходящего размера;

$$\overline{C_R^\perp Z(\lambda)} \Big|^+ = \left(Z^T(\lambda) C_R^{\perp T} C_R^\perp Z(\lambda) \right)^{-1} Z^T(\lambda) C_R^{\perp T}. \quad (15)$$

Таким образом, закон обратной связи (6) с матрицами (14), (15) обеспечивает инвариантность АДС (1) к произвольным возмущениям $w \in R^p$.

Заключение

На основе преобразований обобщенных пучков матриц получены необходимые и достаточные условия инвариантности линейных АДС к внешним возмущениям. Предложен метод аналитического синтеза инвариантных законов управления, обеспечивающих указанную инвариантность.

Библиографический список

1. **Щипанов, Г.В.** Гироскопические приборы слепого полета / Г.В. Щипанов. – М.: Обргиз, 1938.
2. **Щипанов, Г.В.** Теория и методы проектирования автоматических регуляторов / Г.В. Щипанов // А и Т. – 1939. – № 1. – С. 49 – 66.
3. **Мисриханов, М.Ш.** Инвариантное управление многомерными системами. Алгебраический подход / М.Ш. Мисриханов. – М.: Наука, 2007.
4. **Бояринцев, Ю.Е.** Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы / Ю.Е. Бояринцев. – Новосибирск: Наука, 2000.
5. **Картвелишвили, Н.А.** Идеализация сложных динамических систем / Н.А. Картвелишвили, Ю.И. Галактионов. – М.: Наука, 1976.
6. **Yip, E.L.** Solvability, controllability and observability of continuous descriptor systems / E.L. Yip, R.F. Sincovec // IEEE Trans. Automat. Control. – 1981. – V. 26. – P. 702 – 706.
7. **Гантмахер, Ф.Р.** Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988.
8. **Зыбин, Е.Ю.** Минимальная параметризация решений линейных матричных уравнений / Е.Ю. Зыбин, М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // Современные методы управления многосвязными динамическими системами. Вып. 2 / под ред. А.А. Красовского. – М.: Энергоатомиздат, 2003. – С. 191 – 202.

УДК 519.6

МЕТОД СИНТЕЗА СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ НА ОСНОВЕ РАЗВИТИЯ ИДЕИ ВАН ДЕР ВОУДА

М.Ш. Мисриханов, д-р техн. наук, В.Н. Рябченко, д-р физ.-мат. наук

Введение. Проблема управления спектром матрицы [1] или заданного размещения полюсов [2, 3] (pole placement [4]) является ключевой в современной теории управления линейными системами. Эта проблема возникает при решении задачи стабилизации линейной системы с многими входами и многими выходами (Multi Input Multi Output – МІМО)

$$\sigma x = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $u(t) \in \mathbb{R}^r$ – вектор входа; $y(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор выхода; B, C – числовые матрицы полного ранга; \mathbb{R} – множество действительных чисел; σ – символ, обозначающий при

$$\sigma x(t) = \dot{x}(t)$$

непрерывную, а при

$$\sigma x(t) = x(t+1)$$

дискретную систему.

Если $C = I_n$, т.е. $y = x$, то управление (1) осуществляется на основе закона с обратной связью

$$u = -Fx, \quad (2)$$

где $F \in \mathbb{R}^{r \times n}$ – матрица регулятора по состоянию.

Если $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m < n$, тогда закон (2) заменяется на

$$u = -Ky = -KCx, \quad (3)$$

где $K \in \mathbb{R}^{r \times m}$ – матрица регулятора по выходу.

Для линейной системы с одним входом и многими выходами (Single Input Multi Output – SIMO)

$$\sigma x = Ax + bu, \quad y = Cx, \quad (4)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $u \in \mathbb{R}^1$ – скалярный вход; $y \in \mathbb{R}^m$ – векторный выход; A – циклическая матрица [5], законы (2) и (3) приобретают вид

$$u = -f^T x, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

$$u = -k^T Cx, \quad k \in \mathbb{R}^m. \quad (6)$$

Введем множество собственных значений матрицы A

$$\Lambda(A) = \left\{ \lambda_i \in \mathbb{C} : \det(\lambda_i I_n - A) = 0, i = \overline{1, n} \right\}, \quad (7)$$

являющихся корнями характеристического полинома (х.п.)

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0. \quad (8)$$

Для полностью управляемой МИМО-системы (1) и СИМО-системы (4) следующие утверждения являются эквивалентными [4]:

- а) (\mathbf{A}, \mathbf{B}) , (\mathbf{A}, \mathbf{b}) – управляемые пары;
- б) матрицы управляемости Калмана

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-r}\mathbf{B} \\ \mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \mathbf{A}^2\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-r}\mathbf{b} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

имеют полный ранг по строкам;

- в) обобщенные матричные пучки

$$(\lambda_i \mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{B}), \quad (\lambda_i \mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \quad (10)$$

имеют полный ранг для всех $\lambda_i \in \Lambda(\mathbf{A})$;

г) собственные значения матриц $\mathbf{A} - \mathbf{BF}$ и $\mathbf{A} - \mathbf{bf}^T$ могут быть заданы произвольным образом и непрерывно зависят от матриц регуляторов \mathbf{F} в законе (2) и \mathbf{f}^T в законе (5).

Аналогичные утверждения с учетом дуальности справедливы для наблюдаемости линейных систем (1) и (4).

Ключевым утверждением при решении задачи управления спектром матрицы [1] с помощью стабилизирующего закона (6) является теорема Ван дер Воуда (Van der Woude J.W.).

Теорема Van der Woude [6]. Пусть линейная СИМО-система (4) при $\sigma \mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ полностью управляемая и

$$f(\lambda) = \lambda^n + \hat{\alpha}_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \hat{\alpha}_1 \lambda + \hat{\alpha}_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

произвольный полином. Тогда для существования вектора $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$ такого, что

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{bk}^T \mathbf{C}) = \lambda^n + \hat{\alpha}_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \hat{\alpha}_1 \lambda + \hat{\alpha}_0, \quad (12)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$f(A)\text{Ker}C \subset \text{Lin}(\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-2}\mathbf{b}). \quad (13)$$

Здесь $\text{Ker} C$ – ядро матрицы C ; $\text{Lin}(\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-2}\mathbf{b})$ – линейная оболочка¹, натянутая на векторы $\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-2}\mathbf{b}$ [5].

Ниже на основе ленточных критериев [7 – 10] приводится аналог теоремы Ван дер Воуда, дается решение задачи стабилизации СИМО-системы (4) при заданном х.п. замкнутой системы (12), а также описано множество векторов разности коэффициентов заданного (12) и исходного (8) х.п., которые могут быть реализованы с помощью обратной связи по выходу.

Ленточные матрицы и критерии. В [7 – 10] описаны ленточные матрицы и критерии, играющие фундаментальную роль в представлении и описании свойств линейных управляемых систем. Рассмотрим сначала линейную систему с одним входом и одним выходом (Single Input Single Output – SISO)

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{x} &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $u \in \mathbb{R}^1$ – скалярный вход; $y \in \mathbb{R}^1$ – скалярный выход. В зависимости от цели исследований (14) это может быть ленточная (прямоугольная) матрица управляемости

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{b}_L^\perp A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_L^\perp & -\mathbf{b}_L^\perp A & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_L^\perp & -\mathbf{b}_L^\perp A & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_L^\perp & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\mathbf{b}_L^\perp A \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{b}_L^\perp \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n^2-1) \times n^2} \quad (15)$$

или ленточная (прямоугольная) матрица наблюдаемости

¹ Другое обозначение – Span .

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} -\mathbf{A}\mathbf{c}_R^\perp & \mathbf{c}_R^\perp & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -\mathbf{A}\mathbf{c}_R^\perp & \mathbf{c}_R^\perp & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}\mathbf{c}_R^\perp & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{c}_R^\perp & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{A}\mathbf{c}_R^\perp & \mathbf{c}_R^\perp \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{n^2 \times (n^2 - 1)}. \quad (16)$$

Здесь и далее $\mathbf{0}$ – нулевая матрица подходящего размера¹; символ $(\cdot)_L^\perp$ – левый делитель нуля максимального ранга заданной матрицы (вектора); символ $(\cdot)_R^\perp$ – правый делитель нуля максимального ранга заданной матрицы (вектора).

Напомним [14], что левым делителем нуля максимального ранга некоторой действительной матрицы $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ранга r называется матрица \mathbf{M}_L^\perp , если одновременно выполняются условия

$$\mathbf{M}_L^\perp \mathbf{M} = \mathbf{0}_{(n-r) \times m}, \quad \text{rank } \mathbf{M}_L^\perp = n - r.$$

Симметрично, правым делителем нуля максимального ранга некоторой действительной матрицы $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ранга r называется матрица \mathbf{M}_R^\perp , если одновременно выполняются условия

$$\mathbf{M} \mathbf{M}_R^\perp = \mathbf{0}_{n \times (m-r)}, \quad \text{rank } \mathbf{M}_R^\perp = m - r.$$

В дальнейшем без ограничения общности будем полагать, что матрицы \mathbf{M}_L^\perp и \mathbf{M}_R^\perp удовлетворяют условиям ортогональности, т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_L^\perp \mathbf{M}_L^{\perp T} &= \mathbf{I}_{n-r}, \\ \mathbf{M}_R^{\perp T} \mathbf{M}_R^\perp &= \mathbf{I}_{m-r}. \end{aligned}$$

Заметим, что без уменьшения общности можно считать, что

$$\text{Ker } \mathbf{M} = \mathbf{M}_R^\perp, \quad \text{Ker } \mathbf{M}^T = \mathbf{M}_L^\perp. \quad (17)$$

¹ В отдельных случаях ее размер будет указываться явно.

Сосредоточим внимание на матрице (15), а получаемые результаты в силу принципа дуальности свойств управляемости и наблюдаемости линейной системы будем распространять на задачи, где фигурирует матрица (16).

Нами было установлено:

1. Для полной управляемости SISO-системы (14) необходимо и достаточно, чтобы [10]

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} -b_L^\perp A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline b_L^\perp & -b_L^\perp A & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & b_L^\perp & -b_L^\perp A & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & b_L^\perp & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -b_L^\perp A \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & b_L^\perp \end{array} \right)_R^\perp = \left(\begin{array}{c} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 \\ \mathbf{Y}_4 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{n-1} \\ \mathbf{Y}_n \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{n^2}, \mathbf{Y}_i \in \mathbb{R}^n, \quad (18)$$

т.е. правый делитель нуля максимального ранга прямоугольной матрицы (15) был в точности вектором [10].

2. Ленточная матрица (15) инвариантна по отношению к действию законов обратной связи (5) и (6) [7].

3. Коэффициенты характеристического полинома (8) определяются формулой [10]

$$\left(\begin{array}{c} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} -b^+ A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline b^+ & -b^+ A & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & b^+ & -b^+ A & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & b^+ & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -b^+ A & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & b^+ & -b^+ A \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{n-1} \\ \mathbf{Y}_n \end{array} \right), \quad (19)$$

$$b^+ \mathbf{Y}_n = 1.$$

4. Коэффициенты полинома

$$\beta(\lambda) = \beta_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \beta_1 \lambda + \beta_0 \quad (20)$$

числителя передаточной функции

$$\mathbf{G}(\lambda) = \mathbf{c}^T (\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \frac{\beta(\lambda)}{\alpha(\lambda)} \quad (21)$$

удовлетворяют следующему соотношению [11]:

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{c}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{c}^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{c}^T & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & -\mathbf{c}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 \\ \mathbf{Y}_4 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_n \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathbf{b}^+ \mathbf{Y}_n = 1.$$

5. Пусть

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{f}^T) = \lambda^n + \hat{\alpha}_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \hat{\alpha}_1\lambda + \hat{\alpha}_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (23)$$

заданный х.п. замкнутой SISO-системы (14) с обратной связью. В [10] показано, что вектор \mathbf{k}^T может быть вычислен с помощью формулы

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 - \hat{\alpha}_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} - \hat{\alpha}_{n-2} \\ \alpha_{n-1} - \hat{\alpha}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{f}^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{f}^T & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{f}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_n \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathbf{b}^+ \mathbf{Y}_n = 1.$$

6. Ленточные матрицы (15), (16) играют ключевую роль в задачах обеспечения инвариантности линейной системы по отношению к действующим возмущениям [9].

Отметим, что для полностью управляемой SISO-системы матрица

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{Y}} = (\mathbf{Y}_1 \mid \mathbf{Y}_2 \mid \dots \mid \mathbf{Y}_{n-1} \mid \mathbf{Y}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (25)$$

составленная из векторов \mathbf{Y}_i , $i = \overline{1, n}$, является аналогом матрицы А.Н. Крылова [10] и обратима. При этом формула (24) эквивалентна следующей формуле [13]:

$$\mathbf{f}^T = \Delta \alpha^T \mathbf{z}_{\mathbf{Y}}^{-1}, \quad (26)$$

где

$$\Delta \alpha^T = (\hat{\alpha}_0 - \alpha_0 \mid \hat{\alpha}_1 - \alpha_1 \mid \dots \mid \hat{\alpha}_{n-2} - \alpha_{n-2} \mid \hat{\alpha}_{n-1} - \alpha_{n-1}). \quad (27)$$

В [13] ленточные конструкции, приведенные выше, обобщены на случай ММО-системы (1).

Ниже на основе преобразования ленточных матриц представлен аналог теоремы Ван дер Воуда и описано решение задачи стабилизации СИМО-системы (4) при заданном х.п. замкнутой системы (12).

Аналог теоремы Ван дер Воуда. Предваряя предлагаемый нами аналог теоремы Ван дер Воуда, введем необходимые в дальнейшем леммы [14].

Лемма 1. Линейное матричное уравнение

$$\mathbf{XV} = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_3}, \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_3}, \quad (28)$$

разрешимо относительно матрицы $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ тогда и только тогда, когда правый делитель нуля максимального ранга¹ \mathbf{V}_R^\perp является и правым делителем нуля матрицы \mathbf{Q} :

$$\mathbf{QV}_R^\perp = \mathbf{0}. \quad (29)$$

Лемма 2. Все множество решений матричного уравнения (28) при выполнении условия разрешимости (29) определяется формулой (с минимальной параметризацией)

$$\mathbf{X} = \mathbf{QV}^+ + \boldsymbol{\eta} \mathbf{V}_L^\perp, \quad (30)$$

где \mathbf{V}^+ – псевдообратная матрица; $\boldsymbol{\eta}$ – произвольная матрица подходящего размера.

¹ Если рассматривать делители нуля не максимального ранга, то условие также становится только необходимым.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1 (аналог теоремы Ван дер Воуда). Для полностью управляемой линейной СИМО-системы (4) существует такой вектор $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$, что обеспечивается полином (12), если и только если

$$\Delta \alpha^T \mathcal{Z}_Y^{-1} \mathbf{C}_R^\perp = \mathbf{0}. \quad (31)$$

Доказательство теоремы 1. Если х.п. (12) задан, тогда вектор $\mathbf{C}^T \mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$ должен удовлетворять формуле (26), т.е.

$$\mathbf{k}^T \mathbf{C} = \Delta \alpha^T \mathcal{Z}_Y^{-1}, \quad (32)$$

где неизвестным считается вектор $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$. Рассматривая (32) как линейное матричное уравнение (28) согласно лемме 1 (см. (29)), получим условие разрешимости (31), но это и есть условие теоремы Ван дер Воуда (13)¹.

Доказательство закончено.

Теорема 2. Если для полностью управляемой линейной СИМО-системы (4) существует такой вектор $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$, что обеспечивается полином (12), то

$$\mathbf{k}^T = \Delta \alpha^T \mathcal{Z}_Y^{-1} \mathbf{C}^+. \quad (33)$$

Доказательство теоремы 2. Если условие (32) выполняется, тогда, в соответствии с леммой 2 (см. (30)), получаем решение (33), где в силу полноты ранга матрицы \mathbf{C} составляющая решения имеет вид

$$\boldsymbol{\eta} \mathbf{C}_L^\perp = \mathbf{0}.$$

Доказательство закончено.

Теорема 3. Если для полностью управляемой линейной СИМО-системы (4) выполняется условие (31), то могут быть реализованы только следующие векторы разности коэффициентов х.п. (27):

$$\Delta \alpha^T = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{C} \mathcal{Z}_Y, \quad (34)$$

¹ См. доказательство теоремы Ван дер Воуда в [1, стр. 192 – 195].

где $\mu^T \in \mathbb{R}^m$ – произвольный вектор.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим условие (31) как уравнение относительно вектора (27). В силу леммы 2, обратимости матрицы \mathcal{K}_Y (25) и полноты ранга матрицы C_R^\perp , произведение матриц $\mathcal{K}_Y^{-1}C_R^\perp$ имеет левый делитель нуля максимального ранга, равный $C\mathcal{K}_Y$. Действительно,

$$C\mathcal{K}_Y\mathcal{K}_Y^{-1}C_R^\perp = CC_R^\perp = \mathbf{0}. \quad (35)$$

Очевидно, что вектор $\mu^T C\mathcal{K}_Y$ при любом $\mu^T \in \mathbb{R}^m$ также является левым делителем нуля единичного ранга матрицы $\mathcal{K}_Y^{-1}C_R^\perp$.

Доказательство закончено.

Таким образом, нами представлен аналог теоремы Ван дер Воуда в терминах ленточных матриц, дано решение задачи стабилизации СИМО-системы (4) при заданном х.п. замкнутой системы (12), а также описано и параметризовано множество векторов разности коэффициентов заданного (12) и исходного (8) х.п.

Обобщение теоремы Ван дер Воуда на МИМО-системы. Получим для МИМО-системы (1) формулу синтеза регулятора, аналогичную (26). Рассмотрим линейную МИМО-систему (1), где $C = I_n$:

$$\sigma x = Ax + Bu. \quad (36)$$

Введем разбиение на столбцы для матрицы входа

$$B = (b_1 \mid b_2 \mid \dots \mid b_{r-1} \mid b_r). \quad (37)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ всегда найдется такая последовательность векторов $b_1 \in \mathbb{R}^n$, $b_2 \in \mathbb{R}^n$, ..., $b_r \in \mathbb{R}^n$, где $r < n$, что пара матриц

$$(A + b_1 f_1^T + b_2 f_2^T + \dots + b_{r-1} f_{r-1}^T, b_r) \quad (38)$$

является управляемой. Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1^T &= \Theta_1^T \mathbf{b}_1^{\perp L} (\omega_1 \mathbf{I}_n - \mathbf{A}), \\ \mathbf{f}_2^T &= \Theta_2^T \mathbf{b}_2^{\perp L} (\omega_2 \mathbf{I}_n - \mathbf{A}), \\ &\vdots \\ \mathbf{f}_{r-1}^T &= \Theta_{r-1}^T \mathbf{b}_{r-1}^{\perp L} (\omega_{r-1} \mathbf{I}_n - \mathbf{A}); \end{aligned}$$

$\Theta_i^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ – произвольный ненулевой вектор; ω_i – произвольный скаляр;
 $\mathbf{b}_i^{\perp L}$ – левый делитель нуля максимального ранга вектора \mathbf{b}_i , $i = 1, (r-1)$.

Доказательство теоремы 3.2 осуществляется аналогичным образом, как это сделано в [2] для леммы 1¹.

Введем обозначения:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{b}_1 \mathbf{f}_1^T + \mathbf{b}_2 \mathbf{f}_2^T + \dots + \mathbf{b}_{r-1} \mathbf{f}_{r-1}^T, \quad (39)$$

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \tilde{\mathbf{A}}) = \lambda^n + \tilde{\alpha}_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \tilde{\alpha}_1 \lambda + \tilde{\alpha}_0. \quad (40)$$

На основании справедливости леммы 3 справедлива следующая лемма [13].

Лемма 4. Для линейной полностью управляемой МИМО-системы (36) закон обратной связи (2), обеспечивающий замкнутой системе х.п.

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{b}_r \mathbf{f}^T) = \lambda^n + \hat{\alpha}_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \hat{\alpha}_1 \lambda + \hat{\alpha}_0, \quad (41)$$

определяется формулой

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}} \\ \hline \Delta \alpha \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_{\mathbf{r}}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \Theta_1^T \mathbf{b}_1^{\perp L} (\omega_1 \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \\ \hline \Theta_2^T \mathbf{b}_2^{\perp L} (\omega_2 \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \\ \hline \vdots \\ \hline \Theta_{r-1}^T \mathbf{b}_{r-1}^{\perp L} (\omega_{r-1} \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\kappa}}_{\mathbf{r}} = (\tilde{\mathbf{Y}}_n \mid \tilde{\mathbf{Y}}_{n-1} \mid \dots \mid \tilde{\mathbf{Y}}_2 \mid \tilde{\mathbf{Y}}_1), \quad (44)$$

¹ См. также [1, стр. 183 – 185]

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_1 \\ \tilde{\mathbf{Y}}_2 \\ \tilde{\mathbf{Y}}_3 \\ \tilde{\mathbf{Y}}_4 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{n-1} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{b}_r^{\perp L} \tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_r^{\perp L} & -\mathbf{b}_r^{\perp L} \tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_r^{\perp L} & -\mathbf{b}_r^{\perp L} \tilde{\mathbf{A}} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_r^{\perp L} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\mathbf{b}_r^{\perp L} \tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{b}_r^{\perp L} \end{pmatrix}_R^{\perp}. \quad (45)$$

При этом параметризация всех регуляторов (42), обеспечивающих характеристический полином (41), осуществляется путем замены в расчетных соотношениях вектора \mathbf{b}_r на любой другой вектор \mathbf{b}_i из (37), а также путем варьирования элементов векторов Θ_i^T и скаляров ω_i в (43).

Теперь можно сформулировать обобщение теоремы (аналога) Ван дер Воуда на случай МИМО-системы.

Теорема 4 (обобщение теоремы Ван дер Воуда). Для полностью управляемой линейной МИМО-системы (1) существует такой вектор $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$, что обеспечивается полином

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BKC}) = \lambda^n + \hat{\alpha}_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + \hat{\alpha}_1 \lambda + \hat{\alpha}_0, \quad (46)$$

если и только если

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{K}} \\ \Delta \alpha \tilde{\mathbf{z}}_r^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{C}_R^{\perp} = \mathbf{0}, \quad (47)$$

где

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \Theta_1^T \mathbf{b}_1^{\perp L} (\omega_1 \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \\ \Theta_2^T \mathbf{b}_2^{\perp L} (\omega_2 \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Theta_{r-1}^T \mathbf{b}_{r-1}^{\perp L} (\omega_{r-1} \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \end{pmatrix}. \quad (48)$$

По аналогии с теоремами 2 и 3 доказываются соответствующие теоремы, обобщающие случай МИМО-системы.

Теорема 5. Если для полностью управляемой линейной МИМО-системы (1) существует такой вектор $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$, что обеспечивается полином (46), то

$$\mathbf{K} = \left(\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{K}} \\ \hline \Delta \alpha \tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{r}}^{-1} \end{array} \right) \mathbf{C}^+. \quad (49)$$

При этом параметризация всех регуляторов (49), обеспечивающих характеристический полином (46), осуществляется путем замены в расчетных соотношениях вектора \mathbf{b}_r на любой другой вектор \mathbf{b}_i из (37), а также путем варьирования элементов векторов Θ_i^T и скаляров ω_i в (43), удовлетворяющих условию

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}_R^\perp = \left(\begin{array}{c} \Theta_1^T \mathbf{b}_1^{\perp L} (\omega_1 \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \\ \hline \Theta_2^T \mathbf{b}_2^{\perp L} (\omega_2 \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \\ \hline \vdots \\ \hline \Theta_{r-1}^T \mathbf{b}_{r-1}^{\perp L} (\omega_{r-1} \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \end{array} \right) \mathbf{C}_R^\perp = \mathbf{0}. \quad (50)$$

Теорема 6. Если для полностью управляемой линейной МИМО-системы (1) выполняется условие (47), то могут быть реализованы только следующие векторы разности коэффициентов х.п. (27):

$$\Delta \alpha^T = \mu^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{r}}, \quad (51)$$

при условии, что выполняется (50). При этом параметризация всех векторов $\Delta \alpha^T$ осуществляется путем замены в расчетных соотношениях вектора \mathbf{b}_r на любой другой вектор \mathbf{b}_i из (37), а также путем варьирования элементов векторов μ^T , Θ_i^T и скаляров ω_i в (43), удовлетворяющих условию (50).

Таким образом, выше представлено обобщение теоремы Ван дер Воуда в терминах ленточных матриц на случай МИМО-системы (1), дано решение задачи стабилизации МИМО-системы при заданном х.п. замкнутой системы (46), а также описано и параметризовано все множество векторов разности коэффициентов (51) заданного и исходного х.п.

Пример синтеза. Рассмотрим усложненную задачу, когда задана полностью управляемая SISO-система

$$\sigma x = \dot{x} = Ax + bu, \quad y = c^T x, \quad (52)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c^T = \begin{pmatrix} 0,8 \\ -1 \\ -0,2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Характеристический полином (8) здесь равен

$$\det(\lambda I_n - A) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda - 10 \quad (54)$$

и, как видно, является неустойчивым.

Предположим, что с помощью обратной связи по выходу

$$u = -k^T c^T x, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (55)$$

требуется обеспечить устойчивый х.п. следующего вида:

$$\det(\lambda I_n - A + bk^T c^T) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + 7\lambda^2 + 9\lambda + 10. \quad (56)$$

Вычитая соответствующие коэффициенты х.п. (56) и х.п. (54), найдем вектор разности (27):

$$\Delta \alpha^T = (20 \mid 0 \mid 6 \mid 6).$$

Вычислим далее левый делитель нуля вектора b и правый делитель нуля вектора c^T из (53). Получим

$$b_L^\perp = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,8333 & 0,1667 & -0,1667 \\ -0,5 & 0,1667 & 0,8333 & 0,1667 \\ 0,5 & 0,1667 & 0,1667 & 0,8333 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c}_R^{\perp T} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0,6108 & 0,7494 & -0,0501 & 0,2506 \\ \hline 0,1222 & -0,0501 & 0,99 & 0,0501 \\ \hline -0,6108 & 0,2506 & 0,0501 & 0,7494 \end{array} \right).$$

При этом

$$\mathbf{c}^{+T} = (0,2885 \mid -0,3731 \mid -0,0746 \mid 0,3731).$$

Сформируем ленточную матрицу (15), найдем ее правый делитель нуля (18), а затем построим матрицу (25). Получим

$$\mathbf{z}_R = (\mathbf{Y}_1 \mid \mathbf{Y}_2 \mid \mathbf{Y}_3 \mid \mathbf{Y}_4) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0,2274 & 0,1387 & -0,0693 & -0,0693 \\ \hline -0,5547 & 0 & 0,0693 & 0,0693 \\ \hline 0,4160 & 0,2080 & -0,1387 & -0,0693 \\ \hline -0,5547 & -0,0693 & 0,1387 & 0,0693 \end{array} \right).$$

Согласно теореме 1 проверим условие (31):

$$\Delta \alpha^T \mathbf{z}_R^{-1} \mathbf{C}_R^{\perp} = (20 \mid 0 \mid 6 \mid 6) \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0,2274 & 0,1387 & -0,0693 & -0,0693 \\ \hline -0,5547 & 0 & 0,0693 & 0,0693 \\ \hline 0,4160 & 0,2080 & -0,1387 & -0,0693 \\ \hline -0,5547 & -0,0693 & 0,1387 & 0,0693 \end{array} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\begin{array}{c|c|c} 0,6108 & 0,1222 & -0,6108 \\ \hline 0,7494 & -0,0501 & 0,2506 \\ \hline -0,0501 & 0,99 & 0,0501 \\ \hline 0,2506 & 0,0501 & 0,7494 \end{array} \right) \approx 0,$$

где

$$\left\| \Delta \alpha^T \mathbf{z}_R^{-1} \mathbf{C}_R^{\perp} \right\|_E < 7,27 \cdot 10^{-15},$$

$\left\| \Delta \alpha^T \mathbf{z}_R^{-1} \mathbf{C}_R^{\perp} \right\|_E$ – эрмитова векторная норма.

Таким образом, задача стабилизации неустойчивой SISO-системы (52), (53) обратной связью по выходу (55) с обеспечением заданного х.п. (56) разрешима, а ее решение, в соответствии с формулировкой теоремы 2, равно

$$\mathbf{k}^T = \Delta \alpha^T \mathbf{z}_{\mathbf{r}}^{-1} \mathbf{c}^+ =$$

$$= (20 \mid 0 \mid 6 \mid 6) \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0,2274 & 0,1387 & -0,0693 & -0,0693 \\ \hline -0,5547 & 0 & 0,0693 & 0,0693 \\ \hline 0,4160 & 0,2080 & -0,1387 & -0,0693 \\ \hline -0,5547 & -0,0693 & 0,1387 & 0,0693 \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c} 0,2985 \\ -0,3731 \\ -0,0746 \\ 0,3731 \end{array} \right) = -10.$$

Можно убедиться, что х.п. замкнутой системы равен

$$\det \left(\left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda-1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 2 & \lambda-1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & \lambda-1 & -1 & 2 \\ \hline -1 & -1 & 1 & \lambda \end{array} \right) - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 10 \cdot (0,8 \mid -1 \mid -0,2 \mid 1) \right) =$$

$$= \lambda^4 + 3\lambda^3 + 7\lambda^2 + 9\lambda + 10,$$

что и требовалось получить.

Наконец, используя теорему 3, осуществим параметризацию векторов разности коэффициентов х.п. (27), которые можно реализовать для SISO-системы (52), (53). Имеем

$$\Delta \alpha^T = \mu^T \mathbf{c}^T \mathbf{z}_{\mathbf{r}} = (10\mu \mid 0 \mid 3\mu \mid 3\mu), \quad \mu \in \mathbb{R},$$

или в другом виде

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{k}^T \mathbf{c}^T) = \lambda^4 + (3\mu - 3)\lambda^3 + (3\mu + 1)\lambda^2 + 9\lambda + 10(\mu - 1). \quad (57)$$

Заметим, что на интервале значений $\mu = [1,666; 2,285]$ полином (57) является устойчивым.

Заключение

На основе разработанного подхода к анализу и синтезу линейных управляемых систем с помощью ленточных матриц и критериев полу-

чен аналог теоремы Ван дер Воуда на случай линейной управляемой СИМО-системы. Дано решение задачи стабилизации при заданном характеристическом полиноме замкнутой системы, описано и параметризовано множество векторов разности коэффициентов заданного и исходного характеристических полиномов, которые могут быть реализованы с помощью обратной связи по выходу. Получено обобщение теоремы Ван дер Воуда на случай линейной управляемой МИМО-системы, а также описано и параметризовано множество векторов разности коэффициентов заданного и исходного характеристических полиномов этой системы, которые могут быть реализованы с помощью обратной связи по выходу.

Библиографический список

1. **Леонов, Г.А.** Методы стабилизации линейных управляемых систем / Г.А. Леонов, М.М. Шумафов. – СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2005.
2. **Андреев, Ю.Н.** Управление конечномерными линейными объектами / Ю.Н. Андреев. – М.: Наука, 1976.
3. **Дорф, Р.** Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2004.
4. **Kailath, T.** Linear Systems / T. Kailath. – Prentice Hall. Englewood Cliffs, NJ., 1980.
5. **Воеводин, В.В.** Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984.
6. **Van der Woude, J.W.** A note on pole placement by static output feedback for single input systems / J.W. Van der Woude // Systems&Control Letters. – 1988. – Vol. 11. – P. 285 – 287.
7. **Мисриханов, М.Ш.** Lentочные критерии управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем / М.Ш. Мисриханов // АиТ. – 2005. – № 2. – С. 93 – 104.
8. **Зыбин, Е.Ю.** Рекурсивные тесты на управляемость и наблюдаемость больших динамических систем / Е.Ю. Зыбин, М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // АиТ. – 2006. – № 5. – С. 119 – 132.
9. **Мисриханов, М.Ш.** Инвариантное управление многомерными системами. Алгебраический подход / М.Ш. Мисриханов. – М.: Наука. 2007.
10. **Мисриханов, М.Ш.** Lentочная формула решения задачи А.Н. Крылова / М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // АиТ. – 2007. – № 12. – С. 53 – 69.
11. **Мисриханов, М.Ш.** Lentочная формула полинома числителя передаточной функции скалярной линейной системы / М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // Вестник ИГЭУ – 2009. – № 2. – С. 76 – 81.
12. **Мисриханов, М.Ш.** Lentочные критерии и рекурсивные тесты полной управляемости и наблюдаемости линейных алгебро-дифференциальных систем / М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // АиТ. – 2008. – № 9.
13. **Мисриханов, М.Ш.** Анализ и синтез линейных динамических систем на основе lentочных формул / М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // Вестник ИГЭУ – 2009. – № 2. – С. 81 – 84.
14. **Мисриханов, М.Ш.** Алгебраические и матричные методы в теории линейных МИМО-систем / М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // Вестник ИГЭУ. – 2005. – Вып. 5. – С. 196 – 240.

УДК 51.74

**СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ
НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОЙ ФОРМУЛЫ АККЕРМАНА***М.Ш. Мисриханов, д-р техн. наук, В.Н. Рябченко, д-р физ.-мат. наук*

Введение. Современные энергосистемы (ЭС) представляют собой многосвязные динамические системы с глубокими взаимными связями. Для решения задач управления и защиты в современных ЭЭС широко используются компьютерные технологии. Эти технологии позволяют реализовывать в ЭС сложные и разветвленные алгоритмы управления. К таким алгоритмам относятся алгоритмы, реализующие модальные законы управления.

Далеко не полный список (по годам) методов модального синтеза выгладит следующим образом [1]: метод Басса и Гура (1966), метод Аккерманна (1970), метод Мейна–Мардоха (1970), метод Маки–Ван де Вейта (1974), метод Барнетта (1975), метод Гоуришанкара–Ремера (1976), метод Мура (1976), метод Клейна–Мура (1977, 1982), метод Портера–Д’Аццо (1978), метод Уонема (1979), метод Мунро (1979), метод Флемма (1980), метод Варги (1981), метод Феми и О’Рейли (1982), метод Каутского–Никольса–Ван Доорена (1985). Сюда же следует отнести широко известный модальный метод, построенный на основе теоремы о вычетах передаточной функции.

Отметим, что одной из первых отечественных работ, посвященных применению методов модального синтеза в электроэнергетике, является работа Б.И. Брузгина [2].

Одной из наиболее известных явных расчетных формул, применяемых для модального синтеза регуляторов и наблюдателей в динамических системах с представлением в пространстве состояний, является формула Аккерманна [3, 4]. Кратко рассмотрим ее.

Пусть задана полностью управляемая линейная динамическая система с одним входом и одним выходом (SISO – Single Input Single Output)

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = c^T x, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $u \in \mathbb{R}^1$ – скалярный вход; $y \in \mathbb{R}^1$ – скалярный выход; \mathbb{R} – множество действительных чисел.

Условие полной управляемости по Калману системы (1), или, что то же самое, полной управляемости пары (A, b) , соответствует невырожденности матрицы управляемости

$$\Omega_{\varrho}(A, \mathbf{b}) = \left(\mathbf{b} \mid A\mathbf{b} \mid \dots \mid A^{n-1}\mathbf{b} \right) \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (2)$$

Условие полной наблюдаемости по Калману системы (1) (полной наблюдаемости пары (A, \mathbf{c}^T)) соответствует невырожденности матрицы наблюдаемости

$$\Omega_{\varrho}(A, \mathbf{c}^T) = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \hline \mathbf{c}^T A \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{c}^T A^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (3)$$

Пусть характеристический полином матрицы A равен

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0, \quad (4)$$

где \mathbf{I}_n – единичная матрица порядка n ; $\lambda \in \mathbb{C}$ и \mathbb{C} – множество комплексных чисел. Будем считать, что с помощью закона обратной связи по переменным состояния

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$$

требуется обеспечить замкнутой системе

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \mathbf{x}$$

следующий характеристический полином:

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - A + \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = \lambda^n + \beta_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \beta_1 \lambda + \beta_0. \quad (5)$$

Введем обозначение $\Xi(A, \beta)$ для матричной функции

$$A^n + \beta_{n-1} A^{n-1} + \dots + \beta_1 A + \beta_0 \mathbf{I}_n. \quad (6)$$

Тогда расчетная формула Аккерманна для вектора коэффициентов регулятора будет иметь вид

$$\mathbf{k}^T = (0 \mid \dots \mid 0 \mid 1) \cdot \Omega_{\varrho}^{-1}(A, \mathbf{b}) \cdot \Xi(A, \beta). \quad (7)$$

Применительно к задаче синтеза наблюдателя состояния системы (1)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + l(y - c^T \hat{x}) + bu, \quad (8)$$

где $v = ly$ – инъекция выхода системы, формула Аккерманна имеет симметричный по отношению к (7) вид

$$l = \Xi(A, \gamma) \cdot \Omega_o^{-1}(A, c^T) \cdot (0 \mid \dots \mid 0 \mid 1)^T \quad (9)$$

и обеспечивает наблюдающему устройству характеристический полином

$$\det(\lambda I_n - A + lc^T) = \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_1\lambda + \gamma_0. \quad (10)$$

В формуле (9) обозначена матричная функция

$$\Xi(A, \gamma) = A^n + \gamma_{n-1}A^{n-1} + \dots + \gamma_1A + \gamma_0I_n. \quad (11)$$

Основным достоинством расчетных формул Аккерманна (7), (9) является их явный вид, что позволяет по известным параметрам SISO-системы (1), ее характеристическому полиному (4) и заданному расположению полюсов, выраженному в коэффициентах характеристических полиномов (5) и (10), рассчитать обратную связь и наблюдающее устройство, обеспечивающее замкнутой системе заданное расположение полюсов.

Ниже рассматривается обобщение формул Аккерманна (7), (9) на случай линейной стационарной динамической системы в пространстве состояний с многими входами и многими выходами (MIMO – Multi Input Multi Output). Эта задача является достаточно актуальной, поскольку явных расчетных формул синтеза закона обратной связи для MIMO-систем, аналогичных формулам Аккерманна, не существует. В дальнейшем обобщенная формула Аккерманна используется для модального синтеза управления ЭС.

Обобщенная формула Аккерманна. Будем далее рассматривать MIMO-систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (12)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $u \in \mathbb{R}^r$ – вектор выхода; $y \in \mathbb{R}^m$ – вектор выхода, считая, что ее индекс управляемости ν равен $n - r + 1$, а индекс наблюдаемости – $\mu = n - m + 1$.

Напомним, что *индексом управляемости* $v \in \mathbb{N}$ пары матриц (\mathbf{A}, \mathbf{B}) [3, 5], где \mathbb{N} – множество натуральных чисел, называется наименьшее число, при котором выполняется тождество рангов

$$\text{rank}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) = \text{rank}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{v-1}\mathbf{B}). \quad (13)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае выполняется достаточно общее условие

$$\text{rank}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{v-1}\mathbf{B}) = \text{rank}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-r}\mathbf{B}) = n. \quad (14)$$

Вводимое условие на индекс управляемости означает, что при отсутствии сигнала управления на каком-либо из входов ММО-системы (12) она не является полностью управляемой.

Аналогичные рассуждения с учетом симметрии справедливы для индекса наблюдаемости.

Пусть матрица \mathbf{B} разбита на блоки

$$\mathbf{B} = (\mathcal{E} \mid \mathbf{b}) = (\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \dots \mid \mathbf{b}_{r-1} \mid \mathbf{b}_r), \quad (15)$$

т.е.

$$\mathcal{E} = (\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \dots \mid \mathbf{b}_{r-1}), \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_r.$$

Тогда при $v = n - r + 1$ можно записать

$$\text{rank}(\mathcal{E} \mid \mathbf{A}\mathcal{E} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathcal{E}) = \text{rank}(\mathcal{E} \mid \mathbf{A}\mathcal{E} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-r}\mathcal{E}) < n.$$

Известно утверждение, которое для случая (12), (15) формулируется следующим образом.

Лемма 1 [6]. Пусть (\mathbf{A}, \mathbf{B}) – полностью управляемая пара и пусть матрица \mathbf{B} имеет вид (15), тогда существует такая матрица $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{(r-1) \times n}$, что пара матриц $(\mathbf{A} - \mathcal{E}\mathcal{K}, \mathbf{b})$ полностью управляемая.

Опираясь на лемму 1, сформулируем другую лемму.

Лемма 2. Пусть (\mathbf{A}, \mathbf{B}) – полностью управляемая пара с индексом управляемости $v = n - r + 1$, где матрица \mathbf{B} имеет вид (15), и пусть задана такая матрица $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{(r-1) \times n}$, что пара матриц $(\mathbf{A} + \mathcal{E}\mathcal{K}, \mathbf{b})$ полностью управляемая. Тогда закон обратной связи

$$u = - \begin{pmatrix} \mathcal{K} \\ k^T \end{pmatrix} x, \quad (16)$$

где

$$k^T = (0 \mid \dots \mid 0 \mid 1) \cdot \Omega_{\rho}^{-1}(A - \mathcal{E}\mathcal{K}, b) \cdot \Xi(A - \mathcal{E}\mathcal{K}, \beta), \quad (17)$$

$$\Omega_{\rho}(A - \mathcal{E}\mathcal{K}, b) = \left(b \mid (A - \mathcal{E}\mathcal{K})b \mid \dots \mid (A - \mathcal{E}\mathcal{K})^{n-1}b \right), \quad (18)$$

$$\Xi(A - \mathcal{E}\mathcal{K}, \beta) = (A - \mathcal{E}\mathcal{K})^n + \beta_{n-1}(A - \mathcal{E}\mathcal{K})^{n-1} + \dots + \beta_1(A - \mathcal{E}\mathcal{K}) + \beta_0 I_n, \quad (19)$$

обеспечивает матрице $A - \mathcal{E}\mathcal{K} - bk^T$ заданный характеристический полином

$$\det(\lambda I_n - A + \mathcal{E}\mathcal{K} + bk^T) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_1\lambda + \beta_0. \quad (20)$$

Доказательство леммы 2 очевидно. Действительно, лемма 1 сводит условия управляемости МИМО-системы к условию управляемости СИСО-системы, для которой (при полной управляемости) справедлива формула Аккерманна (7).

Принципиальным недостатком формулы (17) является отсутствие условий на выбор (назначение) матрицы $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{(r-1) \times n}$. Один из случаев назначения матрицы \mathcal{K} указан в [6]. Можно также действовать «наугад», подбирая каким-либо способом матрицу \mathcal{K} в (16) или формируя ее с помощью генератора случайных чисел до тех пор, пока матрица управляемости (18) не будет обратной.

Этому можно противопоставить более конструктивный подход.

Сформулируем лемму [7].

Лемма 3. Пусть (A, B) – полностью управляемая пара с индексом управляемости $\nu = n - r + 1$ и пусть матрица B имеет вид (15), тогда для полной управляемости пары матриц $(A - \mathcal{E}\mathcal{K}, b)$ достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\mathcal{K} = \Theta \mathcal{E}_L^{\perp} (\omega I_n - A), \quad (21)$$

где \mathcal{E}_L^{\perp} – левый делитель нуля максимального ранга матрицы \mathcal{E} ; Θ – подходящая по размеру матрица полного ранга с произвольными элементами из \mathbb{C} ; ω – произвольный скаляр из \mathbb{C} , не совпадающий с вещественными собственными значениями матрицы A , имеющими различную

алгебраическую и геометрическую кратности, такие что матрица (21) имеет элементы только из \mathbb{R} .

Напомним [8], что матрица M_L^\perp является левым делителем нуля максимального ранга некоторой матрицы $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ранга r , если одновременно выполняются условия

$$M_L^\perp M = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}, \quad \text{rank } M_L^\perp = n - r.$$

При этом если $m = r$, то

$$\text{rank} \begin{pmatrix} M^T \\ \hline M_L^\perp \end{pmatrix} = n.$$

С учетом симметрии матрица M_R^\perp является левым делителем нуля максимального ранга матрицы $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ранга r , если одновременно выполняются условия

$$M M_R^\perp = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m \times (m-r)}, \quad \text{rank } M_R^\perp = m - r.$$

При этом если $n = r$, то

$$\text{rank} \left(M^T \mid M_R^\perp \right) = n.$$

Доказательство леммы 3 можно осуществить различными путями. Укажем один из них.

Управляемость пары (A, B) означает, что

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}: \text{rank} (\lambda I_n - A \mid B) = \text{rank} (\lambda I_n - A \mid \mathcal{E} b) = n. \quad (22)$$

С другой стороны, для пары $(A - \mathcal{E}\mathcal{K}, b)$, где \mathcal{K} удовлетворяет (21), можно записать цепочку утверждений

$$\begin{aligned} & \text{rank} (\lambda I_n - A + \mathcal{E}\Theta \mathcal{E}_L^\perp (\omega I_n - A) \mid b) = \\ & = \text{rank} (\lambda I_n - A + \mathcal{E}\Theta \mathcal{E}_L^\perp (\omega I_n - A) + \omega I_n - \omega I_n \mid b) = \\ & = \text{rank} ((\lambda - \omega) I_n - (I_n + \mathcal{E}\Theta \mathcal{E}_L^\perp) (\omega I_n - A) \mid b). \end{aligned} \quad (23)$$

Матрица $I_n + \mathcal{E}\Theta\mathcal{E}_L^\perp$ в (23) обладает следующими непосредственно проверяемыми свойствами:

$$(I_n + \mathcal{E}\Theta\mathcal{E}_L^\perp)^{-1} = I_n - \mathcal{E}\Theta\mathcal{E}_L^\perp, \quad (I_n + \mathcal{E}\Theta\mathcal{E}_L^\perp)^n = I_n + n\mathcal{E}\Theta\mathcal{E}_L^\perp; \quad (24)$$

$$\text{eig}(I_n + \mathcal{E}\Theta\mathcal{E}_L^\perp) = \text{eig}(I_n). \quad (25)$$

Здесь $\text{eig}(\cdot)$ – множество собственных значений.

В силу равенства

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathcal{E}^\top \\ \mathcal{E}_L^\perp \end{pmatrix} = n,$$

условия (22) и свойств (24), (25) для последнего соотношения (23), где матрица A имеет собственные значения с различной геометрической и алгебраической кратностью, можно записать

$$\forall (\lambda - \omega) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}: \text{rank} \left((\lambda - \omega)I_n - (I_n + \mathcal{E}\Theta\mathcal{E}_L^\perp)(\omega I_n - A) \mid \mathbf{b} \right) = n, \quad (26)$$

но это и есть условие управляемости пары $(A - \mathcal{E}\mathcal{K}, \mathbf{b})$.

На основании справедливости лемм 2 и 3 сформулируем теорему.

Теорема 1. Пусть (A, \mathbf{B}) – полностью управляемая пара с индексом управляемости $\nu = n - r + 1$, где матрица \mathbf{B} имеет вид (15), и пусть выбрана любая матрица \mathcal{K}' из множества матриц (21), тогда закон обратной связи

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} = - \begin{pmatrix} \mathcal{K}' \\ \mathbf{k}^\top \end{pmatrix} \mathbf{x} = - \begin{pmatrix} \Theta\mathcal{E}_L^\perp(\omega I_n - A) \\ \mathbf{k}^\top \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad (27)$$

где

$$\mathbf{k}^\top = (0 \mid \dots \mid 0 \mid 1) \cdot \Omega_\varrho^{-1}(A - \mathcal{E}\mathcal{K}', \mathbf{b}) \cdot \Xi(A - \mathcal{E}\mathcal{K}', \beta), \quad (28)$$

обеспечивает матрице $A - \mathcal{E}\mathcal{K}' - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top$ заданный характеристический полином (20). При этом параметризация множества законов обратной связи (27), обеспечивающих характеристический полином (20), осуществляется с помощью изменения варианта разбиения матрицы \mathbf{B} , варьирования элементов матрицы Θ и скаляра ω .

Относительно скаляра ω в формуле (21) необходимо сделать специальное замечание. Если (вещественное) собственное значение λ_0 матрицы A имеет различные геометрическую и алгебраическую кратности¹, то применение матрицы

$$\mathcal{K}' = \Theta \mathcal{E}_L^\perp (\lambda_0 I_n - A) \quad (29)$$

приведет к нарушению условий леммы 3, что, в свою очередь, окажется недостаточным для обеспечения управляемости пары матриц $(A - \mathcal{E}\mathcal{K}', b)$.

С учетом дуальности управляемости и наблюдаемости ММО-системы (12) сформулируем лемму и теорему, аналогичные соответственно лемме 3 и теореме 1.

Лемма 4. Пусть (A, C) – полностью наблюдаемая пара с индексом наблюдаемости $\mu = n - m + 1$, где матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} \mathcal{C} \\ \mathcal{C}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1^T \\ \mathcal{C}_1^T \\ \vdots \\ \mathcal{C}_{m-1}^T \\ \mathcal{C}_m^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (30)$$

тогда для полной наблюдаемости пары матриц $(A - \mathcal{L}\mathcal{C}, c)$ достаточно, чтобы

$$\mathcal{L} = (\omega I_n - A) \Psi \mathcal{C}_R^\perp, \quad (31)$$

где \mathcal{C}_R^\perp – правый делитель нуля максимального ранга матрицы \mathcal{C} ; Ψ – подходящая по размеру матрица полного ранга с произвольными элементами из \mathbb{C} ; ω – произвольный скаляр из \mathbb{C} , не совпадающий с вещественными собственными значениями матрицы A , имеющими различную алгебраическую и геометрическую кратности такие, что матрица (31) имеет элементы только из \mathbb{R} .

Теорема 2. Пусть (A, C) – полностью наблюдаемая пара с индексом наблюдаемости $\mu = n - m + 1$, где матрица C имеет вид (30), и

¹ Матрица не является циклической.

пусть выбрана любая матрица \mathcal{L}' из множества матриц (21), тогда закон инъекции выхода

$$v = -Ly = -(\mathcal{L}' \mid l)y = -((\omega I_n - A)\Psi \mathcal{E}_R^\perp \mid l)y, \quad (32)$$

где

$$l = \Xi(A - \mathcal{L}'\mathcal{E}, \gamma) \cdot \Omega_o^{-1}(A - \mathcal{L}'\mathcal{E}, c^T) \cdot (0 \mid \dots \mid 0 \mid 1)^T, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \Xi(A - \mathcal{L}'\mathcal{E}, \gamma) = \\ & = (A - \mathcal{L}'\mathcal{E})^n + \beta_{n-1}(A - \mathcal{L}'\mathcal{E})^{n-1} + \dots + \beta_1(A - \mathcal{L}'\mathcal{E}) + \beta_0 I_n, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\Omega_o(A - \mathcal{L}'\mathcal{E}, c^T) = \begin{pmatrix} \frac{c^T}{\dots} \\ \frac{c^T(A - \mathcal{L}'\mathcal{E})}{\dots} \\ \vdots \\ \frac{c^T(A - \mathcal{L}'\mathcal{E})^{n-1}}{\dots} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

обеспечивает матрице $A - \mathcal{L}'\mathcal{E} - lc^T$ заданный характеристический полином

$$\det(\lambda I_n - A + \mathcal{L}'\mathcal{E} + lc^T) = \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_1\lambda + \gamma_0. \quad (36)$$

При этом параметризация множества законов обратной связи (27), обеспечивающих характеристический полином (36), осуществляется с помощью изменения варианта разбиения матрицы C , варьирования элементов матрицы Ψ и скаляра ω .

Модальный синтез управления электрической станцией, работающей на шину бесконечной мощности. Рассмотрим пример синтеза управления на основе предложенного обобщения формул Аккермана для электрической станции, представляющей собой одномашинную систему, работающую на шину бесконечной мощности (рис. 1) [9].

Структурная схема данной ЭС, разработанная Филлипсом и Хеффроном, приведена на рис. 2. Числовые параметры модели представлены на рис. 3. Будем рассматривать данную ЭС без учета системного стабилизатора (PSS – Power System Stabilizer), считая, что соответствующие ему связи разомкнуты.

$$A = \begin{pmatrix} -20 & -0,04211 & 0 & 0 & 0 & 0,04 & -20 \\ 1000 & -0,8211 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,053 & -0,5517 & 0 & -572,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0751 & 0 & -118,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,093 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,053 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,081 & 0 & -13,6 & 0 & -20 \end{pmatrix}; \quad (37)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,081 & 0 & -13,596 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,093 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 314 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Входной и выходной векторы равны

$$u = \begin{pmatrix} \Delta T_m \\ \Delta U_{ref} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} U_T \\ \delta \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Без учета работы системного стабилизатора моды колебаний ЭС определяются следующим множеством комплексных чисел:

$$\{-18,996 \mp j2,017; -0,211 \pm j3,188; -2,133; -0,912 \pm j1,363\}. \quad (40)$$

Поскольку, согласно теореме о разделении [3], синтез регулятора в цепи обратной связи и наблюдателя состояния можно осуществлять раздельно, рассмотрим только модальный синтез регулятора. Для этого воспользуемся теоремой 1.

Предположим, что синтезируемый регулятор должен обеспечить быстроходящиеся процессы, определяемые следующим полиномом:

$$\begin{aligned} & \lambda^7 + \beta_6 \lambda^6 + \dots + \beta_1 \lambda + \beta_0 = \\ & = \lambda^7 + 42\lambda^6 + 550\lambda^5 + 43249\lambda^4 + 8668\lambda^3 + 20562\lambda^2 + 27642\lambda + 21389. \end{aligned} \quad (41)$$

Следуя теореме 1, введем разбиение матрицы B :

$$B = (\mathcal{E} \mid \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Вычислим далее матрицу-делитель нуля \mathcal{E}_L^\perp :

$$\mathcal{E}_L^\perp = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и выберем (будем считать, что произвольно)

$$\omega = 1, \quad \Theta = (0 \mid 0 \mid 0 \mid 1 \mid 1 \mid 1).$$

Найдем по формуле (29) матрицу обратной связи:

$$\mathcal{K}' = (0 \mid -1,0526 \mid -0,081 \mid -0,0926 \mid 14,5962 \mid 2 \mid 21).$$

Выполняя далее вычисления по формуле (28), получим

$$\mathbf{k}^\top = (-2,2802 \mid 0,0666 \mid -0,1729 \mid 0,0747 \mid 16,5598 \mid -0,0622 \mid 20,8144), \quad (43)$$

при этом

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_n - A + \mathcal{E}\mathcal{K}' + \mathbf{b}\mathbf{k}^\top) &= \det(\lambda I_n - A + \mathbf{B}\mathbf{K}) = \\ &= \lambda^7 + 42\lambda^6 + 550\lambda^5 + 43249\lambda^4 + 8668\lambda^3 + 20562\lambda^2 + 27642\lambda + 21389, \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Нормализованные графики переходных процессов исходной ЭС и замкнутой найденным регулятором приведены на рис. 4. Рис. 4, а соответствует реакции на ступенчатое изменение ΔU_{ref} , рис. 4, б – ΔT_m . Жирными линиями выделены графики переходных процессов исходной системы.

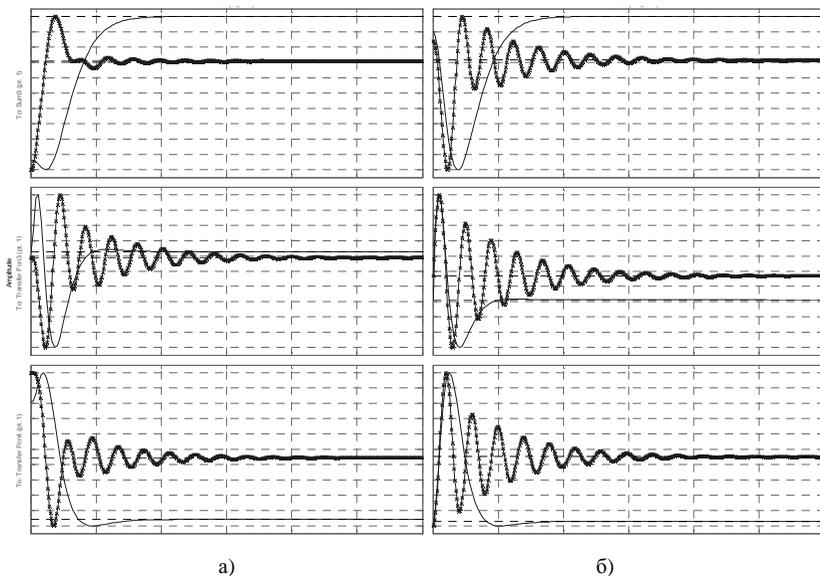


Рис. 4. Нормализованные графики переходных процессов ЭС

Варьируя параметры (29), можно найти другие матрицы регулятора, обеспечивающие тот же самый заданный характеристический полином.

Реализовать предложенный подход к синтезу закона обратной связи МИМО-системы можно с помощью несложной модификации функции *acker* программного продукта MATLAB.

Заключение

Предложенное обобщение на МИМО-системы расчетных формул Аккерманна и Басса-Гура позволяет осуществлять синтез регуляторов и наблюдателей состояния по заданным характеристическим полиномам. Предложенный подход дает возможность решать задачи синтеза управления ЭС без ограничений на количество входов (выходов), а также получать параметризацию множества регуляторов и наблюдателей.

Библиографический список

1. **Мисриханов, М.Ш.** Модальный синтез регуляторов энергосистемы на основе устройств FACTS / М.Ш. Мисриханов, В.Ф. Ситников, Ю.В. Шаров // Электротехника. – 2007. – № 10. – С. 22 – 29.
2. **Брузгин, Б.И.** Модальное управление режимами энергосистем / Б.И. Брузгин // Анализ функционирования и управления режимами сложных электроэнергетических систем: сб. науч. тр. / ЭНИН им. Г.М. Кржижановского. – М., 1989.
3. **Kailath, T.** Linear Systems / T. Kailath; Prentice Hall. Englewood Cliffs. – NJ., 1980.
4. **Дорф, Р.** Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.
5. **Смагина, Е.М.** Вопросы анализа линейных многомерных объектов с использованием понятия нуля системы / Е.М. Смагина. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990.
6. **Андреев, Ю.Н.** Управление конечномерными линейными объектами / Ю.Н. Андреев. – М.: Наука, 1976.
7. **Мисриханов, М.Ш.** Обобщение формул модального синтеза Аккерманна и Басса-Гура для линейных многомерных систем с многими входами и многими выходами / М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // Доклады РАН. – 2008. – Т. № 3.
8. **Зыбин, Е.Ю.** Минимальная параметризация решений линейных матричных уравнений / Е.Ю. Зыбин, М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // Современные методы управления многосвязными динамическими системами. Вып. 2 / под ред. А.А. Красовского. – М.: Энергоатомиздат, 2003. – С. 191 – 202.
9. **Heffron, W.G.** Effect of modern ampliclyne voltage regulators on underexcited operation of large turbine generators / W.G. Heffron, R.A. Fillips // AIEE Trans. – 1952. – Vol. PAS-71. – P. 692 – 697.

УДК 519.6

**НОВЫЙ МЕТОД СТАБИЛИЗАЦИИ
ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

М.Ш. Мисриханов, д-р техн. наук, В.Н. Рябченко, д-р физ.-мат. наук

Введение. Задача стабилизации линейной динамической системы в той или иной постановке рассматривалась в многочисленных работах (см., например, [10 – 21]), но до сих пор не утратила своей актуальности.

Рассмотрим линейную динамическую систему с многими входами и многими выходами (ММО – Multi Input Multi Output)

$$\sigma x = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $u \in \mathbb{R}^r$ – вектор входа; $y \in \mathbb{R}^m$ – вектор выхода; \mathbb{R} – множество действительных чисел; σ – символ, обозначающий при

$$\sigma \mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$$

непрерывную, а при

$$\sigma \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$$

дискретную систему.

Предполагается, что матрицы $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ и $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ имеют полные ранги, а матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ заведомо неустойчива, т.е. множество ее собственных значений

$$\text{eig}(\mathbf{A}) = \{ \lambda_i \in \mathbb{C} : \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 0 \},$$

где \mathbf{I}_n – единичная матрица размера $n \times n$; \mathbb{C} – множество комплексных чисел (комплексная плоскость), обязательно включает такие $\lambda_i \in \mathbb{C}$, что выполняются условия

$$\text{Re}(\lambda_i) > 0 \text{ для случая } \sigma \mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$$

и

$$\text{Re}(\lambda_i) > 1 \text{ для случая } \sigma \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1).$$

В дальнейшем \mathbb{C}^{stab} , в зависимости от типа изучаемой МИМО-системы (непрерывной или дискретной), будет обозначать соответственно левую полуплоскость \mathbb{C}^- либо область внутри круга единичного радиуса с центром в начале \mathbb{C} .

Считается, что для МИМО-системы (1) существует управление с обратной связью

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x}, \quad (2)$$

где $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ – матрица регулятора по состоянию, либо

$$\mathbf{u} = \mathbf{y} = \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (3)$$

где $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times m}$ – матрица регулятора по выходу.

Управление системой (1) с помощью законов (2) и (3) является классической задачей, когда необходимо найти такие матрицы \mathbf{F} и \mathbf{K} , что обеспечиваются некоторые заданные требования к процессу управления. Эти требования условно можно разделить на три группы [16]:

а) требования на размещение полюсов замкнутой системы (собственных значений матриц $A + BF$, $A + BKC$) в заданных точках \mathbb{C}^{stab} или в заданной области¹ \mathbb{C}^{stab} ;

б) требования на размещение полюсов и нулей (тех или иных нулей передаточной матрицы МИМО-системы [20, 21]) замкнутой системы в заданных точках \mathbb{C}^{stab} или заданных областях \mathbb{C}^{stab} ;

в) требования к переходным процессам в замкнутой системе в смысле минимума заданного функционала.

Требование (а) распространяется на все известные постановки задачи стабилизации. При этом, как правило, выдвигаются дополнительные требования полной управляемости и полной наблюдаемости системы.

Наиболее ярко требование (а) выражается в постановках модального управления [10, 11, 13 – 16, 19 – 21].

Хорошо известно, что характеристические полиномы

$$\det(\lambda I_n - A + BF), \quad (4)$$

$$\det(\lambda I_n - A + BKC), \quad (5)$$

где $\lambda = s$ для случая $\sigma x(t) = \dot{x}(t)$ и $\lambda = z$ для случая $\sigma x(t) = x(t+1)$, задают распределение полюсов замкнутой системы на \mathbb{C} . В этом смысле они являются определяющими для устойчивости МИМО-системы (1). Накладывая требования на желаемое в смысле требования (а) распределение полюсов, можно обеспечить устойчивость и (опосредованно) качество переходных процессов в замкнутой системе.

Требования на распределение полюсов можно задавать с помощью разложения полиномов (4), (5) на множители, например,

$$\det(\lambda I_n - A - BF) = (\lambda - \tilde{\lambda}_1)(\lambda - \tilde{\lambda}_2) \cdots (\lambda - \tilde{\lambda}_n), \quad (6)$$

где $\tilde{\lambda}_i$ – заданные значения корней полинома (собственные значения матрицы $A + BF$), или разложения матрицы

$$A + BF = W \Lambda W^{-1}, \quad (7)$$

где Λ – матрица диагонально-клеточного типа; W – матрица преобразования.

¹ Заданной областью, например, может быть вся левая полуплоскость \mathbb{C}^- .

В матрице Λ для каждого i -го действительного полюса λ_i , соответствующего заданному значению корня характеристического полинома (6), имеется клетка размера 1×1 , а для каждой пары комплексно-сопряженных корней – клетка размера 2×2 вида

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{Re}(\lambda_i) & \text{Im}(\lambda_i) \\ \hline -\text{Im}(\lambda_i) & \text{Re}(\lambda_i) \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Если заданы кратные корни, то это отражается в структуре матрицы Λ , как это делается в жордановой форме матрицы [22].

Еще одним способом реализации требования (а) является использование LMI-областей [12, 9, 23]. Пусть D – некоторая заданная область \mathbb{C}^{stab} в смысле требования (а), тогда существуют определенного вида линейные матричные неравенства (Linear Matrix Inequalities – LMI), описывающие границы этой области.

Ниже представлен метод стабилизации по состоянию и выходу линейной ММО-системы, т.е. обеспечения выполнения требования (а) для ММО-системы (1) с помощью законов (2) и (3) в смысле размещения собственных значений матриц $A + BF$, $A + BKC$ в области \mathbb{C}^{stab} . В основе метода лежит специфическое преобразование подобия исходной системы. При этом в явном виде определяются элементы, изменение которых с помощью обратной связи позволяет обеспечить устойчивость замкнутой системы. Никаких дополнительных предположений об управляемости и наблюдаемости системы (1) не делается.

Частный случай стабилизации. Рассмотрим сначала частный, но весьма важный случай стабилизации ММО-системы (1).

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть матрица $B^\perp AB^{\perp T} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ асимптотически устойчива, тогда асимптотически устойчива любая матрица $A + BF$, где

$$F = \Phi B^+ - B^+ A \quad (8)$$

и $\Phi \in \mathbb{R}^{r \times r}$ – произвольная асимптотически устойчивая матрица.

Доказательство теоремы 1. Введем в рассмотрение обратимую матрицу [25]

$$T = \begin{pmatrix} B^\perp \\ \dots \\ B^+ \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $\mathbf{B}^{\perp\top} = \text{null}(\mathbf{B}^\top)$ – ортогональная матрица, удовлетворяющая условиям [24]

$$\mathbf{B}^\perp \mathbf{B} = \mathbf{0}_{r \times r}, \quad (10)$$

$$\mathbf{B}^\perp \mathbf{B}^{\perp\top} = \mathbf{I}_{n-r}; \quad (11)$$

\mathbf{B}^\dagger – псевдообратная матрица Мура-Пенроуза.

Здесь $\mathbf{0}_{r \times r}$ – нулевая матрица размера $r \times r$; \mathbf{I}_{n-r} – единичная матрица размера $(n-r) \times (n-r)$.

Нетрудно показать, что матрица (9) имеет обратную

$$\mathbf{T}^{-1} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{B}^\perp \\ \mathbf{B}^+ \end{array} \right)^{-1} = \left(\mathbf{B}^{\perp\top} \mid \mathbf{B} \right), \quad (12)$$

т.е.

$$\left(\mathbf{B}^{\perp\top} \mid \mathbf{B} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{B}^\perp \\ \mathbf{B}^+ \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{\perp\top} \mathbf{B}^\perp + \mathbf{B} \mathbf{B}^+ = \mathbf{I}_n, \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}^\perp \\ \mathbf{B}^+ \end{pmatrix} \left(\mathbf{B}^{\perp\top} \mid \mathbf{B} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{n-r} & \mathbf{0}_{r \times r} \\ \mathbf{0}_{r \times (n-r)} & \mathbf{I}_r \end{array} \right). \quad (14)$$

Выполним преобразование подобия матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ следующего вида:

$$\mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^\perp \\ \mathbf{B}^+ \end{pmatrix} \mathbf{A} \left(\mathbf{B}^{\perp\top} \mid \mathbf{B} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp\top} & \mathbf{A} \mathbf{B}^\perp \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^+ \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp\top} & \mathbf{B}^+ \mathbf{A} \mathbf{B} \end{array} \right). \quad (15)$$

Рассмотрим далее преобразование вида (15) для матрицы $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}$. Получим

$$\mathbf{T} (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}) \mathbf{T}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^\perp (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}) \mathbf{B}^{\perp\top} & \mathbf{B}^\perp (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}) \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^+ (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}) \mathbf{B}^{\perp\top} & \mathbf{B}^+ (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}) \mathbf{B} \end{array} \right). \quad (16)$$

В силу (10), (11), правая часть уравнения (16) преобразуется к виду

$$\mathbf{T} (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}) \mathbf{T}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp\top} & \mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^+ \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp\top} + \mathbf{F} \mathbf{B}^{\perp\top} & \mathbf{B}^+ \mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{F} \mathbf{B} \end{array} \right). \quad (17)$$

Приравняем правую часть (17) к следующей матрице:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp\top} & \mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{0}_{r \times (n-r)} & \Phi \end{array} \right). \quad (18)$$

В результате поблочного сравнения матриц получим уравнение относительно матрицы $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{r \times n}$:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{(n-r) \times (n-r)} & \mathbf{0}_{r \times r} \\ \hline -\mathbf{B}^+ \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp\top} & \Phi - \mathbf{B}^+ \mathbf{A} \mathbf{B} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{(n-r) \times (n-r)} & \mathbf{0}_{r \times r} \\ \hline \mathbf{F} \mathbf{B}^{\perp\top} & \mathbf{F} \mathbf{B} \end{array} \right) \quad (19)$$

или в другом виде

$$\left(-\mathbf{B}^+ \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp\top} \mid \Phi - \mathbf{B}^+ \mathbf{A} \mathbf{B} \right) = \mathbf{F} \left(\mathbf{B}^{\perp\top} \mid \mathbf{B} \right). \quad (20)$$

Используя свойство (12), перейдем от (20) к равенству

$$\left(-\mathbf{B}^+ \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp\top} \mid \Phi - \mathbf{B}^+ \mathbf{A} \mathbf{B} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{B}^\perp \\ \mathbf{B}^+ \end{pmatrix} = \mathbf{F}, \quad (21)$$

или

$$\mathbf{F} = \Phi \mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^+ \mathbf{A} \left(\mathbf{B}^{\perp\top} \mathbf{B}^\perp + \mathbf{B} \mathbf{B}^+ \right). \quad (22)$$

С учетом свойства (13) от формулы (22) приходим к формуле (8).

Таким образом, если матрица $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ имеет вид (8), тогда правая часть преобразования (17) равна (18). В силу блочно-треугольной структуры эта матрица является асимптотически устойчивой, если асимптотически устойчивы матрицы $\mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp\top}$ и Φ . Но это и вынесено в формулировку теоремы.

Доказательство закончено.

Пусть далее $\mathbf{C}^\perp = \text{null}(\mathbf{C})$ – ортогональная матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\mathbf{C} \mathbf{C}^\perp = \mathbf{0}_{m \times m}, \quad (23)$$

$$\mathbf{C}^{\perp\top} \mathbf{C}^\perp = \mathbf{I}_{n-m}, \quad (24)$$

и C^+ – псевдообратная матрица Мура-Пенроуза.

Теорема 2. Пусть матрица $B^\perp AB^{\perp T}$ асимптотически устойчива, тогда асимптотически устойчива любая матрица $A + BKC$, где

$$K = (\Phi B^+ - B^+ A) C^+ \quad (25)$$

и $\Phi \in \mathbb{R}^{r \times r}$ – любая асимптотически устойчивая матрица, удовлетворяющая условию

$$\Phi B^+ C^{\perp} = B^+ A C^{\perp}. \quad (26)$$

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим преобразование подобия

$$T(A + BKC)T^{-1},$$

где T имеет вид (9). В результате получим

$$T(A + BKC)T^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B^\perp AB^{\perp T} & B^\perp AB \\ \hline B^+ AB^{\perp T} + KCB^{\perp T} & B^+ AB + KCB \end{array} \right). \quad (27)$$

Приравняем правую часть (27) к матрице (18). В результате поблочного сравнения матриц получим уравнение относительно матрицы $K \in \mathbb{R}^{r \times m}$:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{(n-r) \times (n-r)} & \mathbf{0}_{r \times r} \\ \hline -B^+ AB^{\perp T} & \Phi - B^+ AB \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{(n-r) \times (n-r)} & \mathbf{0}_{r \times r} \\ \hline KCB^{\perp T} & KCB \end{array} \right) \quad (28)$$

или в другом виде

$$\left(-B^+ AB^{\perp T} \mid \Phi - B^+ AB \right) = KC \left(B^{\perp T} \mid B \right). \quad (29)$$

Используя свойство (12), перейдем от (29) к уравнению

$$\left(-B^+ AB^{\perp T} \mid \Phi - B^+ AB \right) \begin{pmatrix} B^\perp \\ \hline B^+ \end{pmatrix} = KC. \quad (30)$$

Уравнение (30) разрешимо относительно матрицы $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times m}$, если и только если выполняется условие

$$\left(-\mathbf{B}^+ \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp \top} \mid \Phi - \mathbf{B}^+ \mathbf{A} \mathbf{B} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{\perp} \\ \hline \mathbf{B}^+ \end{pmatrix} \mathbf{C}^{\perp} = \mathbf{0}_{r \times (n-m)}. \quad (31)$$

После соответствующих преобразований условие (31) принимает вид (26). Если же оно выполняется, то матрица $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times m}$ равна (25) [25]. Это и требовалось доказать.

Доказательство закончено.

Общий случай стабилизации. Недостатком приведенных утверждений является тот факт, что в общем случае для системы (1) не гарантируется асимптотическая устойчивость матрицы $\mathbf{B}^{\perp} \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp \top} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$. Поэтому рассмотрим следующие утверждения.

Теорема 3. Пусть для случая $\sigma \mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ выполняется матричное неравенство Ляпунова

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^{\perp} \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp \top} & \mathbf{B}^{\perp} \mathbf{A} \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{array} \right)^{\top} \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^{\perp} \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp \top} & \mathbf{B}^{\perp} \mathbf{A} \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{array} \right) < \mathbf{0}, \quad (32)$$

а для случая $\sigma \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$ – матричное неравенство Ляпунова

$$\mathbf{Z} - \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^{\perp} \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp \top} & \mathbf{B}^{\perp} \mathbf{A} \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{array} \right)^{\top} \mathbf{Z} \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^{\perp} \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp \top} & \mathbf{B}^{\perp} \mathbf{A} \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{array} \right) > \mathbf{0}, \quad (33)$$

где $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{\top} > \mathbf{0}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ – искомые матрицы, тогда асимптотически устойчива любая матрица $\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{F}$, где

$$\mathbf{F} = \mathbf{X} \mathbf{B}^{\perp} + \mathbf{Y} \mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^+ \mathbf{A}. \quad (34)$$

Теорема 4. Пусть для случая $\sigma \mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ выполняется матричное неравенство Ляпунова (32), а для случая $\sigma \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$ – матричное неравенство Ляпунова (33). Пусть также выполняется условие

$$\left(\mathbf{X} \mathbf{B}^{\perp} + \mathbf{Y} \mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^+ \mathbf{A} \right) \mathbf{C}^{\perp} = \mathbf{0}_{r \times (n-m)}, \quad (35)$$

тогда асимптотически устойчива любая матрица $A + BKC$, где

$$K = \left(XB^\perp + YB^+ - B^+A \right) C^+. \quad (36)$$

Доказательство теорем 3 и 4 осуществляется по аналогии с доказательством предыдущих теорем и с учетом того факта, что если для некоторой матрицы $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ выполняются неравенства Ляпунова

$$\begin{aligned} M^T P + P M < 0, \quad P^T = P > 0 \quad (\text{для случая } \sigma x(t) = \dot{x}(t)), \\ P - M^T P M > 0, \quad P^T = P > 0 \quad (\text{для случая } \sigma x(t) = \dot{x}(t)), \end{aligned}$$

то эта матрица является асимптотически устойчивой [12, 9, 23].

Обсуждение результатов. Ключевым объектом в предыдущих рассуждениях являлась форма матрицы преобразованной МИМО-системы. Для простоты далее будем рассматривать матрицу замкнутой системы следующего вида:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} B^\perp A B^{\perp T} & B^\perp A B \\ \hline B^+ A B^{\perp T} & B^+ A B \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{(n-r) \times (n-r)} & \mathbf{0}_{r \times r} \\ \hline F B^{\perp T} & F B \end{array} \right). \quad (37)$$

Эта форма уникальна в том смысле, что содержит в явном виде элементы, которые могут быть изменены подходящим образом в смысле решения задачи стабилизации с помощью закона обратной связи (2). Для системы с одним входом (SIMO – Single Input Multi Output) подобным свойством обладает каноническая управляемая форма [21], представляющая собой для матрицы A сопровождающую форму Фробениуса [22], а для вектора B – единичный орт:

$$A_C = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{array} \right), \quad B_C = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

При замыкании обратной связью матрица A_C (38) преобразуется к следующему виду (задача Аккерманна [21, 26]):

$$\tilde{A}_C = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -\alpha_0 + f_0 & -\alpha_1 + f_1 & -\alpha_2 + f_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} + f_{n-1} \end{array} \right), \quad (39)$$

где

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0,$$

$$\mathbf{F} = (f_0 \mid f_1 \mid f_2 \mid \cdots \mid f_{n-1}) \in \mathbb{R}^{1 \times n}.$$

Аналогом канонической управляемой формы СИМО-систем для МИМО-систем можно считать форму Йокоямы [27, 28]. Однако эта форма не является канонической, поскольку не является единственной.

Формулировки, представленные в теоремах 3 и 4, дают возможность обобщить многие известные методы синтеза управления линейными системами. Покажем это.

Пусть решается задача модального управления, где требование (а), указанное выше, выражено с помощью матрицы (7). В этом случае при условии полной управляемости МИМО-системы (1) решение задачи можно представить следующим образом [16, 20]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{N}\mathbf{W}^{-1}, \quad (40)$$

где \mathbf{R} – решение алгебраического уравнения Сильвестра

$$\mathbf{A}\mathbf{W} - \mathbf{\Lambda}\mathbf{W} = \mathbf{B}\mathbf{N}, \quad (41)$$

а $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ – произвольная матрица полного ранга.

Сопоставим (34) и (40), в результате после соответствующих преобразований получим

$$\mathbf{X} = (\mathbf{N}\mathbf{W}^{-1} + \mathbf{B}^+ \mathbf{A}) \mathbf{B}^{-1\Gamma}, \quad \mathbf{Y} = (\mathbf{N}\mathbf{W}^{-1} + \mathbf{B}^+ \mathbf{A}) \mathbf{B}. \quad (42)$$

Пусть далее матрица \mathbf{F} ищется с целью удовлетворения требования (б) и для этой цели используется подход (задача) Эрзбергера [29]. При выполнении условия разрешимости задачи Эрзбергера

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{B}\mathbf{B}^+) (\mathbf{A}_{mdl} - \mathbf{A}) = \mathbf{0}_{n \times n}$$

ее решение имеет вид

$$F = B^+ (A_{mdl} - A). \quad (43)$$

Здесь A_{mdl} – матрица желаемой модели (эталона).

Выполняя сопоставление (34) и (43), как это сделано ранее, приходим к формулам

$$X = B^+ A_{mdl} B^{\perp T}, \quad Y = B^+ A_{mdl} B. \quad (44)$$

Если решается задача линейно-квадратического оптимального управления с функционалом Летова-Калмана [11, 20] (см. требование (в)), тогда

$$F = R^{-1} B^T P, \quad (45)$$

$P = P^T > 0$ – решение алгебраического уравнения Риккати

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = -Q, \quad Q^T = Q \geq 0.$$

При этом в матрице (34) элементы X и Y будут равны

$$X = (R^{-1} B^T P + B^+ A) B^{\perp T}, \quad Y = (R^{-1} B^T P + B^+ A) B. \quad (46)$$

Заметим также, что к виду (42) приводится решение задачи стабилизации в LMI-области. Например, если $D \subset \mathbb{C}^-$ – окружность с радиусом γ то N и W – решение линейных матричных неравенств [12]

$$\left(\begin{array}{c|c} -\gamma W & W + AW + BN \\ \hline W + WA^T + N^T B^T & -\gamma W \end{array} \right) < 0, \quad W > 0.$$

Наконец, в простейшем случае управления SIMO-системой (см. (39)) элементы X и Y определяются как

$$X = (\tilde{\alpha}_0 \mid \tilde{\alpha}_1 \mid \dots \mid \tilde{\alpha}_{n-2}), \quad Y = \tilde{\alpha}_{n-1}, \quad (47)$$

где

$$\det(\lambda I_n - A - BF) = \lambda^n + \tilde{\alpha}_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \tilde{\alpha}_1 \lambda + \tilde{\alpha}_0.$$

Остановимся вкратце на матричных неравенствах (32), (33). Запишем, например, (32), представляя матрицу $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^T > 0$ в следующем блочном разбиении:

$$\mathbf{Z} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{21}^T \\ \hline \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{22} \end{array} \right), \quad \mathbf{Z}_{11} = \mathbf{Z}_{11}^T, \quad \mathbf{Z}_{22} = \mathbf{Z}_{22}^T. \quad (48)$$

В результате получим

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^\perp \mathbf{A}^T \mathbf{B}^{\perp T} & \mathbf{X}^T \\ \hline \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{B}^{\perp T} & \mathbf{Y}^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{21}^T \\ \hline \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{21}^T \\ \hline \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp T} & \mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{array} \right) < 0. \quad (49)$$

Раскрывая далее (49) с точностью до выделенных блоков, получим систему билинейных неравенств

$$\begin{cases} \mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp T} \mathbf{Z}_{11} + \mathbf{X}^T \mathbf{Z}_{21} + \mathbf{Z}_{11} \mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp T} + \mathbf{Z}_{21}^T \mathbf{X} < 0, \\ \mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp T} \mathbf{Z}_{21}^T + \mathbf{X}^T \mathbf{Z}_{22} + \mathbf{Z}_{11} \mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{Z}_{21}^T \mathbf{Y} < 0, \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{B}^{\perp T} \mathbf{Z}_{11} + \mathbf{Y}^T \mathbf{Z}_{21} + \mathbf{Z}_{21} \mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp T} + \mathbf{Z}_{22} \mathbf{X} < 0, \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{B}^{\perp T} \mathbf{Z}_{21}^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{Z}_{22} + \mathbf{Z}_{21} \mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{Z}_{22} \mathbf{Y} < 0. \end{cases} \quad (50)$$

Решение системы неравенств (50), как и (33), по всей видимости, будет вызывать существенные трудности вычислительного характера с ростом размерности пространства состояний. Одним из способов преодоления этого является рандомизация [30]. В данном случае суть подхода заключается в формировании процедуры генерации матриц вида

$$\mathbf{A}_{rand} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp T} & \mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{array} \right), \quad (51)$$

где $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ таковы, что все элементы множества собственных значений

$$\text{eig}(\mathbf{A}_{rand}) = \{ \lambda_i \in \mathbb{C} : \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{rand}) = 0 \}$$

лежат в области \mathbb{C}^{stab} .

Примеры стабилизации. Рассмотрим числовые примеры для случая $\sigma x(t) = \dot{x}(t)$.

Пример 1. Пусть задана управляемая пара матриц

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} -2 & -1 & 3 & -6 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 5 & 7 & -1 \\ \hline 2 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right), \quad (52)$$

где A – неустойчивая матрица, поскольку ее собственные значения равны

$$\text{eig}(A) = \{-1,3047, 0,2916 \pm 3,0407i, 7,7214\} \notin \mathbb{C}^{stab}.$$

Вычислим матрицы B^\perp и B^+ . Получим

$$B^\perp = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad B^+ = B^T.$$

Найдем матрицу $B^\perp A B^{\perp T}$:

$$B^\perp A B^{\perp T} = \left(\begin{array}{c|c} -2 & -1 \\ \hline 1 & -1 \end{array} \right),$$

и определим ее собственные значения:

$$\text{eig}(B^\perp A B^{\perp T}) = \{-1,5 \pm 0,8660i\} \subset \mathbb{C}^{stab}. \quad (53)$$

Из (53) следует, что матрица $B^\perp A B^{\perp T}$ асимптотически устойчивая и, следовательно, можно воспользоваться формулой (8) из теоремы 1. Выберем в качестве матрицы Φ следующую асимптотически устойчивую матрицу:

$$\Phi = \left(\begin{array}{c|c} -a & b \\ \hline -b & -a \end{array} \right),$$

где $a > 0$ и b – произвольные числа. Тогда закон стабилизации (2) системы (1) будет иметь вид

$$\mathbf{F} = \Phi \mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^+ \mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & -5 & -a-7 & b+1 \\ \hline -2 & -1 & -b+2 & -a-3 \end{array} \right). \quad (54)$$

При этом собственные значения матрицы $\mathbf{A} + \mathbf{BF}$ равны

$$\text{eig}(\mathbf{A} + \mathbf{BF}) = \{-1,5 \pm 0,5\sqrt{3}i, -a \pm bi\} \subset \mathbb{C}^{stab} \quad (55)$$

и свидетельствуют об успешном решении задачи стабилизации системы (1), заданной парой матриц (52), с помощью закона управления (2), (54).

Пусть далее матрица \mathbf{A} принимает вид

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 5 & 7 & -1 \\ \hline 2 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right). \quad (56)$$

Матрица (56) имеет собственные значения

$$\text{eig}(\mathbf{A}) = \{-1,5 \pm 0,8660i, 2,5505, 7,4495\} \not\subset \mathbb{C}^{stab},$$

как и в предыдущем случае указывающие на ее неустойчивость. Более того, пара матриц (\mathbf{A}, \mathbf{B}) , где \mathbf{B} взята из (52), оказывается неуправляемой, поскольку

$$\text{rank}(\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \mathbf{A}^3\mathbf{B}) = 2 < 4.$$

Тем не менее закон стабилизации (2) с матрицей (54) обеспечивает матрице $\mathbf{A} + \mathbf{BF}$ собственные значения (55), т.е. успешно стабилизирует систему (1).

Пример 2. Пусть далее у системы (1) матрица \mathbf{C} имеет вид

$$\mathbf{C} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} -1 & -5 & -10 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 5 & -5 \end{array} \right), \quad (57)$$

при этом

$$\mathbf{C}^\perp = \left(\begin{array}{c|c} -0,9677 & 0,0710 \\ \hline 0,0460 & -0,8468 \\ \hline 0,0495 & 0,3798 \\ \hline 0,2430 & 0,3656 \end{array} \right), \quad \mathbf{C}^+ = \left(\begin{array}{c|c} -0,0209 & -0,0377 \\ \hline -0,0562 & -0,0484 \\ \hline -0,0639 & 0,0429 \\ \hline -0,597 & -0,1495 \end{array} \right),$$

матрица A равна (56), а матрица B взята из (52). Рассмотрим задачу стабилизации этой системы с помощью закона (3).

Проверим выполнение условия (26) из теоремы 2. Для этого вычислим матрицы B^+C^\perp и B^+AC^\perp и получим

$$B^+C^\perp = \left(\begin{array}{c|c} 0,0495 & 0,3798 \\ \hline 0,2430 & 0,3656 \end{array} \right), \quad B^+AC^\perp = \left(\begin{array}{c|c} 1,3008 & -2,0124 \\ \hline -1,2593 & -0,3677 \end{array} \right). \quad (58)$$

Здесь матрица B^+C^\perp – обратимая, поэтому для обеспечения выполнения условия (26) матрица Φ должна иметь единственный вид

$$\Phi = B^+AC^\perp (B^+C^\perp)^{-1}. \quad (59)$$

Вычислим (59) с учетом (58). В результате получим

$$\Phi = \left(\begin{array}{c|c} -13,0 & 8,0 \\ \hline 5,0 & -6,2 \end{array} \right). \quad (60)$$

Собственные значения матрицы Φ (60) равны

$$\text{eig}(\Phi) = \{-16,7805, -2,4195\} \subset \mathbb{C}^{stab},$$

следовательно, она асимптотически устойчивая и может быть использована для формирования матрицы K по формуле (25). Выполняя соответствующие вычисления, получим

$$K = (\Phi B^+ - B^+A)C^+ = \left(\begin{array}{c|c} 1,0 & -2,0 \\ \hline 0,2 & 1,8 \end{array} \right). \quad (61)$$

В результате закон стабилизации (3) с матрицами (57) и (61) обеспечивает матрице $A + BKC$ собственные значения

$$\text{eig}(A + BKC) = \{-1,5 \pm 0,8660i, -16,7805, -2,4195\} \subset \mathbb{C}^{stab}.$$

Таким образом, задача стабилизации системы (1), заданной тройкой матриц (56), (57) и B – из (52), решена с помощью закона (3), где K имеет вид (61).

Заметим, что закон (3) с матрицей \mathbf{K} (61) решает задачу стабилизации тройки матриц (52), (57).

Пример 3. В качестве еще одного примера рассмотрим задачу стабилизации системы (1) с матрицами

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} -2,2374 & -1,2287 & -0,4531 & 0,7988 \\ \hline 1,0976 & 0,2074 & 1,3995 & 0,8968 \\ \hline -0,0016 & 0,2209 & -0,4620 & 0,1379 \\ \hline -1,6146 & -1,0061 & 0,0327 & -1,6191 \end{array} \right), \quad (62)$$

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c} -0,5266 & 0,2486 \\ \hline -0,6855 & 0,1025 \\ \hline -0,2684 & -0,0410 \\ \hline -1,1883 & -2,2476 \end{array} \right), \quad (63)$$

элементы которых распределены по псевдонормальному закону.

Матрица (62) неустойчива, поскольку в множестве собственных значений

$$\text{eig}(\mathbf{A}) = \{-1,5929 \pm 1,5308i, -1,0175, 0,0922\} \not\subset \mathbb{C}^{stab}$$

имеет положительное число.

Вычислим матрицы \mathbf{B}^\perp и \mathbf{B}^+ :

$$\mathbf{B}^{\perp\Gamma} = \left(\begin{array}{c|c} -0,1854 & -0,7399 \\ \hline -0,1582 & 0,6699 \\ \hline 0,9688 & -0,0346 \\ \hline -0,0454 & -0,0507 \end{array} \right), \quad \mathbf{B}^{+\Gamma} = \left(\begin{array}{c|c} -0,6276 & 0,3523 \\ \hline -0,7131 & 0,3651 \\ \hline -0,2411 & 0,1087 \\ \hline -0,0975 & -0,3913 \end{array} \right),$$

и найдем матрицы $\mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp\Gamma}$ и $\mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B}^+$.

Сформируем заданные элементы матрицы (51) и с помощью функции *randn* программы MATLAB [31] найдем устойчивую матрицу. В данном случае она имеет вид

$$\mathbf{A}_{rand} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B}^{\perp\Gamma} & \mathbf{B}^\perp \mathbf{A} \mathbf{B}^+ \\ \hline \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} -0,6943 & 0,0975 & -0,2207 & 0,3347 \\ \hline 0,6118 & -1,1475 & -2,4991 & 0,4782 \\ \hline -0,6382 & -0,3356 & -0,9413 & -0,0001 \\ \hline -0,002 & -0,2751 & 0,0001 & -0,3299 \end{array} \right), \quad (64)$$

а ее собственные значения равны

$$\text{eig}(A_{rand}) = \{-1, 8767, -1, 1176, -0, 0594 \pm 0, 2906i\} \subset \mathbb{C}^{stab}. \quad (65)$$

Согласно (65), матрица (64) является асимптотически устойчивой, поэтому можно воспользоваться формулой (34) из теоремы 3.

Выполняя соответствующие вычисления, получим матрицу

$$F = \left(\begin{array}{c|c|c|c} -0,5552 & 0,1271 & 1,4391 & 1,0621 \\ \hline -0,5640 & 0,0032 & -0,3335 & -1,1423 \end{array} \right)$$

для закона (2), при этом

$$\text{eig}(A + BF) = \{-1, 0081 \pm 0, 8371i, -0, 5484 \pm 0, 0883i\} \subset \mathbb{C}^{stab}.$$

Это и требовалось доказать.

Библиографический список

10. **Андреев, Ю.Н.** Управление конечномерными линейными объектами / Ю.Н. Андреев. – М.: Наука, 1976.
11. **Афанасьев, В.Н.** Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – М.: Высш. шк., 1998.
12. **Баладин, Д.В.** Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / Д.В. Баладин, М.М. Коган. – М.: Физматлит, 2007.
13. **Дорф, Р.** Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.
14. **Куо, Б.** Теория и проектирование цифровых систем управления / Б. Куо. – М.: Машиностроение, 1986.
15. **Леонов, Г.А.** Методы стабилизации линейных управляемых систем / Г.А. Леонов, М.М. Шумафов. – СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2005.
16. **Мисриханов, М.Ш.** Инвариантное управление многомерными системами. Алгебраический подход / М.Ш. Мисриханов. – М.: Наука, 2007.
17. **Мисриханов, М.Ш.** Ленточная формула решения задачи А.Н. Крылова / М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // АиТ. – 2007. – № 12. – С. 53 – 69.
18. **Поляк, Б.Т.** Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. – М.: Наука, 2002.
19. **Подчукаев, В.А.** Теория автоматического управления (аналитические методы) / В.А. Подчукаев. – М.: Физматлит, 2005.
20. **Уонем, М.** Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход / М. Уонем. – М.: Наука, 1980.
21. **Kailath, T.** Linear Systems / Т. Kailath; Prentice Hall. Englewood Cliffs. – NJ., 1980.
22. **Гантмахер, Ф.Р.** Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988.

23. **Skelton, R.E.** An unified algebraic approach to linear control design / R.E. Skelton, T. Iwasaki, K. Grigoriadis. – London: Taylor&Francis Ltd., 1998.
24. **Голуб, Дж.** Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. – М.: Мир, 1999.
25. **Мисриханов, М.Ш.** Алгебраические и матричные методы в теории линейных ММО-систем / М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // Вестник ИГЭУ. – 2005. – Вып. 5. – С. 196 – 240.
26. **Мисриханов, М.Ш.** Модальный синтез управления энергосистемой на основе обобщенной формулы Аккерманна / М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // Автоматика 2008: докл. XV междунар. конф. по автоматическому управлению. – Т. 1. – Одесса: ОНМА, 2008. – С. 362 – 365.
27. **Yokoyma, R.** General structure of linear multi-input multi-output systems / R. Yokoyma // Technol. Report Iwata Univ. – 1972. – P. 13 – 30.
28. **Мисриханов, М.Ш.** Редукция матрицы Розенброка при анализе инвариантных нулей ММО-системы / М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // АИТ. – 2008. – № 10.
29. **Alag, G.** An implementable digital adaptive flight controller designed using stabilized single-stage algorithms / G. Alag, H. Kaufman // IEEE Trans. Automat. Control. – 1977. – V. 22. – No 5. – P. 780 – 788.
30. **Граничин, О.Н.** Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах / О.Н. Граничин, Б.Т. Поляк. – М.: Наука, 2003.
31. **Дашенко, А.Ф.** МАТЛАВ в инженерных и научных расчетах/ А.Ф. Дашенко [и др.]. – Одесса: Астропринт, 2003.

УДК 51.74

РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНВАРИАНТНЫХ НУЛЕЙ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

М.Ш. Мисриханов, д-р техн. наук, В.Н. Рябченко, д-р физ.-мат. наук

Введение. В классической теории регулирования, оперирующей с системами с одним входом и выходом, основополагающим является понятие передаточной функции

$$f(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \frac{y(\lambda)}{u(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

где $\varphi(\lambda), \psi(\lambda) \in \mathbb{R}(\lambda)$ – полиномы степени n и m соответственно; $y(\lambda)$ и $u(\lambda)$ – изображения Лапласа соответственно выходного и входного сигналов; \mathbb{C} – множество комплексных чисел.

Если выполняется строгое неравенство $n > m$, то передаточную функцию (1) называют строго собственной (каузальной), при $n = m$ – просто собственной (бикаузальной). Если же $n < m$, то (1) называется некаузальной.

Системы с представлением (1) часто именуются SISO-системами (Single Input Single Output Systems).

Корни полиномов $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ получили название соответственно полюсов и нулей передаточной функции (1). Заметим, что у строго каузальной передаточной функции SISO-системы число полюсов всегда превосходит число нулей. У бикаузальной¹ передаточной функции эти числа совпадают. У некаузальных² передаточных функций число нулей всегда больше числа полюсов.

Понятия полюсов и нулей играют основополагающую роль при анализе и синтезе SISO-систем.

С середины прошлого века наблюдался все возрастающий интерес к обобщению фундаментальных понятий нулей и полюсов классической теории регулирования на многомерные системы с несколькими входами и выходами (Multi Input Multi Output Systems – MIMO-systems). Характерным примером является известный метод модального синтеза, который может быть рассмотрен как своеобразное обобщение на многомерный случай классического метода сдвига полюсов передаточной функции. Однако если обобщение понятия «полюс» у исследователей не вызвало особого труда (полюса передаточной матрицы многомерной системы с реализацией в пространстве состояний совпадают с собственными значениями или элементами спектра матрицы, представляющей ее полностью управляемую и наблюдаемую подсистему), то для понятия «нуль» долго не был найден адекватный аналог.

Рассмотрим математическую модель электроэнергетической системы (ЭЭС) в виде линейной MIMO-системы (Multi Input Multi Output System) с представлением в пространстве состояний

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad y(t) = Cx(t), \quad (2)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $u(t) \in \mathbb{R}^r$ – вектор входа; $y(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор выхода; $r < n$, $m < n$; A , B , C – числовые матрицы; \mathbb{R} – множество действительных чисел.

¹ Бикаузальные передаточные функции появляются, например, при исследовании группового действия статической обратной связи по состоянию.

² Некаузальные передаточные функции могут возникать при декомпозиции или рекомбинации каузальных систем. Примерами являются задачи оптимальной ганкелевой аппроксимации, спектральной факторизации, согласования моделей, оценивания спектра мощности, разнообразие обратные задачи, общие гамильтоновы задачи и т.д.

Передаточная матрица МИМО-системы (2) при нулевых начальных условиях вычисляется по известной формуле

$$F(\lambda) = C(\lambda I_n - A)^{-1} B = \begin{pmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) & \cdots & f_{1r}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda) & \cdots & f_{2r}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1}(\lambda) & f_{m2}(\lambda) & \cdots & f_{mr}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где I_n – единичная матрица размера $n \times n$;

$$f_{ij}(\lambda) = c_i (\lambda I_n - A)^{-1} b_j = \frac{\psi_{ij}(\lambda)}{\varphi_{ij}(\lambda)}; \quad (4)$$

$$B = (b_1 \mid \cdots \mid b_j \mid \cdots \mid b_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

В передаточной матрице (3) каждый элемент $f_{ij}(\lambda)$ представляет собой передаточную функцию, связывающую i -й вход и j -й выход системы (2).

Попытки соотносить понятие нуля линейной многомерной системы с корнями λ_k полиномов числителей $\psi_{ij}(\lambda)$ передаточной функции $f_{ij}(\lambda)$ оказались безрезультатными, поскольку нули SISO-системы (1) и значения корней λ_k полиномов $\psi_{ij}(\lambda)$ обладают различными свойствами. Так, если в SISO-системе (1) значение комплексной частоты α экспоненциального входного сигнала (пропорционального $e^{\alpha t}$) совпадает с каким-либо корнем полинома $\psi(\lambda)$ – нулем $f(\lambda)$, тогда $f(\alpha) = \psi(\alpha)/\varphi(\alpha) \equiv 0$, т.е. вынужденная составляющая выхода SISO-системы тождественно равна нулю. В многомерном случае аналогичный факт наблюдается, когда каждый элемент числителей $f_{ij}(\lambda)$ имеет множитель $\psi(\lambda)$, т.е.

$$\psi_{ij}(\lambda) = \psi(\lambda) \bar{\psi}_{ij}(\lambda).$$

Тогда при совпадении комплексной частоты α экспоненциального входного сигнала с каким-либо нулем $\psi(\lambda)$ передаточная матрица

$$F(\alpha) = C(\alpha I_n - A)^{-1} B \equiv 0$$

и выход системы (2) будут тождественно нулю. Для передаточной матрицы $F(\lambda)$ общего вида при совпадении α с каким-либо корнем полинома $\psi_{ij}(\lambda)$ обнуляется лишь один или несколько элементов $F(\lambda)$, выход же системы в общем случае не будет нулевым.

Адекватное, качественно эквивалентное классическому понятие нуля многомерной системы впервые было введено в 1970 г. Розенброком, хотя еще ранее некоторые авторы не совсем удачно обращались к концепции многомерных нулей.

Введем определение.

Определение [1]. Комплексное число $\lambda = \alpha^*$, при котором ранг по столбцам матрицы

$$\left(\begin{array}{c|c} A - \alpha^* I_n & B \\ \hline C & \mathbf{0}_{m \times r} \end{array} \right) \quad (5)$$

уменьшается, называется инвариантным нулем.

Здесь $\mathbf{0}_{m \times r}$ – нулевая матрица размера $m \times r$.

Инвариантные нули определяются из условия [2]

$$\left(\begin{array}{c|c} A - \alpha^* I_n & B \\ \hline C & \mathbf{0}_{m \times r} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

описывающего процесс полного «блокирования» передачи сигнала как собственной, так и вынужденной составляющих движения МИМО-системы. Другими словами, при $\lambda = \alpha^*$ существуют такие векторы u_0 и x_0 , что выходная реакция системы равна нулю.

Таким образом, задача определения инвариантных нулей МИМО-системы (2) сводится к обобщенной задаче на собственные значения в общем случае прямоугольного пучка матриц

$$\left(\begin{array}{c|c} A - \lambda I_n & B \\ \hline C & \mathbf{0}_{m \times r} \end{array} \right), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

Поиск инвариантных нулей для больших МИМО-систем, когда размерность пространства состояний много больше единицы ($n \gg 1$), натал-

кивается на серьезные трудности вычислительного характера. Ключевую роль здесь играют ошибки вычисления [3]. Поэтому необходимы новые подходы к построению вычислительных алгоритмов.

Рандомизированное квадрирование ММО-системы. Практический способ вычисления инвариантных нулей ММО-системы (2) связан с так называемым квадрированием системы¹.

Пусть $m > r$ (число выходов системы больше числа входов). Введем в рассмотрение ММО-систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad y^*(t) = T_C Cx(t), \quad (8)$$

где $T_C \in \mathbb{R}^{r \times m}$ – матрица полного ранга по строкам.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1 [1]². Множество инвариантных нулей ММО-системы (2) всегда является подмножеством множества нулей квадратированной ММО-системы (8), но не наоборот.

Пусть далее $r > m$ (число входов системы больше числа выходов). Рассмотрим ММО-систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BT_B u^*(t), \quad x(0) = x_0, \quad y(t) = Cx(t), \quad (9)$$

где $T_B \in \mathbb{R}^{r \times m}$ – матрица полного ранга по столбцам.

Справедливо двойственное лемме 1 следующее утверждение.

Лемма 2 [1]. Множество инвариантных нулей ММО-системы (2) всегда является подмножеством множества нулей квадратированной ММО-системы (9), но не наоборот.

Из лемм 1 и 2 следует, что операция квадрирования в общем случае вводит в систему новые нули. Это необходимо учитывать при выборе матриц T_C и T_B . Одним из способов решения задачи выбора матриц T_C и T_B является предлагаемая нами процедура рандомизации.

Введем в рассмотрение оператор рандомизации $\text{Rand}_{r \times m}$, генерирующий матрицы полного ранга размера $r \times m$. Пусть также $\text{Orth}_{r \times m}$ – оператор ортогонализации матрицы полного ранга размера $r \times m$. Тогда

$$\text{Orth}_{r \times m} (\text{Rand}_{r \times m}) \quad (10)$$

¹ «squaring up».

² См. также [2].

композиция операторов, результатом действия которой является рандомизированная ортогональная матрица полного ранга.

Обозначим Ω – множество инвариантных нулей ММО-системы (2), Ω^* – множество инвариантных нулей квадрированной ММО-системы. Для определенности далее будем считать, что $m > r$ и квадрированная система имеет вид (8).

Пусть Ω_i^* , $i = 1, 2, \dots$ – множества инвариантных нулей квадрированных ММО-систем, где

$$T_C^{(i)} = \text{Orth}_{r \times m} (\text{Rand}_{r \times m}). \quad (11)$$

По аналогии с [4] можно доказать, что в этом случае выполняется условие

$$\bigcap_i^k \Omega_i^* = \Omega. \quad (12)$$

Инвариантные нули квадрированной ММО-системы. Рассмотрим обобщенную задачу на (конечные [8, 9]) собственные значения для квадратного пучка матриц (7):

$$\left(\begin{array}{c|c} A - \lambda I_n & B \\ \hline \tilde{C} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{array} \right) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (13)$$

где матрицы $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ имеют полные ранги по столбцам и строкам соответственно. При этом

$$\tilde{C} = T_C C, \quad T_C = \text{Orth}_{r \times m} (\text{Rand}_{r \times m}). \quad (14)$$

Проанализируем сначала один из практически значимых случаев, когда матрица $\tilde{C}B$ обратима. Этот случай удовлетворяет необходимому условию стабилизируемости ММО-системы [7].

Справедлива теорема.

Теорема 1. Множество конечных собственных значений обобщенного пучка матриц

$$\left(\begin{array}{c|c} A - \lambda I_n & B \\ \hline \tilde{C} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{array} \right)$$

при обратимой матрице $\tilde{C}B$ совпадает с множеством собственных значений числовой матрицы

$$\mathcal{A} = \tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp T} \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{B} (\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{B})^{-1} \tilde{\mathbf{C}} \right) \mathbf{A} \tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp}.$$

Доказательство теоремы 1. Раскроем билинейное уравнение (13) с точностью до выделенных блоков:

$$\begin{cases} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) \mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{Y} = \mathbf{0}, \\ \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{X} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (15)$$

Если система уравнений (15) совместна, тогда из уравнения

$$\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (16)$$

следует, что [5]

$$\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp} \mathbf{x}, \quad (17)$$

где $\tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp} \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$ – правый делитель нуля максимального ранга матрицы $\tilde{\mathbf{C}}$; $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{n-m}$. При этом матрица

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp T} \\ \tilde{\mathbf{C}} \end{pmatrix} \quad (18)$$

обратима.

Предположим, что уравнение (16) справедливо, тогда первое уравнение (15) можно переписать с учетом (17) в виде

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) \tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp} \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{Y} = \mathbf{0}. \quad (19)$$

Используя (18), выполним невырожденное преобразование уравнения (19):

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp T} \\ \tilde{\mathbf{C}} \end{pmatrix} \left((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) \tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp} \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{Y} \right) = \mathbf{0}, \quad (20)$$

где

$$\tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp T} \tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp} = \mathbf{I}_{n-m}. \quad (21)$$

В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp T} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp} - \lambda \mathbf{I}_{n-m} \right) \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp T} \mathbf{B}\mathbf{Y} = \mathbf{0}, \\ \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp} \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{B}\mathbf{Y} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (22)$$

Пусть $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{B} \neq \mathbf{0}_{m \times n}$ ¹, тогда решение второго уравнения (22) можно записать в виде

$$\mathbf{Y} = -(\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{B})^+ \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{C}}_R^\perp \mathbf{x} + (\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{B})_R^\perp \boldsymbol{\varphi}, \quad (23)$$

где $(\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{B})^+$ – псевдообратная матрица; $\boldsymbol{\varphi}$ – некоторый вектор подходящей размерности.

Поскольку предполагается, что матрица $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{B}$ обратима, то можно принять $(\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{B})_R^\perp = \mathbf{0}$ [5].

С учетом обратимости $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{B}$ формула (23) принимает вид

$$\mathbf{Y} = -(\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{B})^{-1} \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{C}}_R^\perp \mathbf{x}. \quad (24)$$

Подставим (24) в первое уравнение (22). В результате получим

$$\left(\tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp\top} \mathbf{A}\tilde{\mathbf{C}}_R^\perp - \lambda \mathbf{I}_{n-m}\right) \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp\top} \mathbf{B} (\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{B})^{-1} \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{C}}_R^\perp \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

или в сгруппированном виде

$$\left(\tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp\top} \mathbf{A}\tilde{\mathbf{C}}_R^\perp - \tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp\top} \mathbf{B} (\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{B})^{-1} \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{C}}_R^\perp - \lambda \mathbf{I}_{n-m}\right) \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (25)$$

Приводя подобные в (25), получим уравнение

$$\left(\tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp\top} \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{B} (\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{B})^{-1} \tilde{\mathbf{C}}\right) \mathbf{A}\tilde{\mathbf{C}}_R^\perp - \lambda \mathbf{I}_{n-m}\right) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (26)$$

и, соответственно, стандартную задачу на собственные значения

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathbf{I}_{n-m}) \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (27)$$

где

$$\mathcal{A} = \tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp\top} \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{B} (\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{B})^{-1} \tilde{\mathbf{C}}\right) \mathbf{A}\tilde{\mathbf{C}}_R^\perp. \quad (28)$$

Доказательство закончено.

¹ В противном случае инвариантные нули у ММО-системы отсутствуют [6].

По аналогии с доказательством теоремы 1 доказывается двойственное утверждение.

Теорема 2. Множество конечных собственных значений обобщенного пучка матриц

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n & \tilde{\mathbf{B}} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{array} \right)$$

при обратимой матрице $\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}^T$ совпадает с множеством собственных значений числовой матрицы

$$\mathcal{A} = \tilde{\mathbf{B}}_L^\perp \mathbf{A} \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{C}^T \left(\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}^T \right)^{-1} \tilde{\mathbf{B}}^T \right) \tilde{\mathbf{B}}_L^{\perp T}. \quad (29)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{B}}_L^\perp \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$ – левый делитель нуля максимального ранга матрицы $\tilde{\mathbf{B}}$, удовлетворяющий условию ортогональности

$$\tilde{\mathbf{B}}_L^\perp \tilde{\mathbf{B}}_L^{\perp T} = \mathbf{I}_{n-m}.$$

Из приведенного выше доказательства теоремы 1 следует, что при выполнении условия ортогональности матриц

$$\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{B} = \mathbf{0}_{n \times n} \quad (30)$$

система уравнений (22) уступает место следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \left(\tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp T} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{C}}_R^\perp - \lambda \mathbf{I}_{n-m} \right) \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp T} \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{0}, \\ \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{C}}_R^\perp \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (31)$$

Нетрудно заметить, что система (31) отвечает обобщенной задаче на собственные значения квадратного пучка матриц

$$\left(\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp T} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{C}}_R^\perp - \lambda \mathbf{I}_{n-m} & \tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp T} \mathbf{B} \\ \hline \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{C}}_R^\perp & \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} \end{array} \right). \quad (32)$$

Если в (32) выполняется условие

$$\det \left(\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{C}}_R^\perp \cdot \tilde{\mathbf{C}}_R^{\perp T} \mathbf{B} \right) \neq 0, \quad (33)$$

то с учетом соответствующих обозначений к (32) применимы формулировки теоремы 1¹.

На основании формулировок теорем 1 и 2 могут быть построены рандомизированные алгоритмы вычисления инвариантных нулей ММО-системы. Рассмотрим это на практическом примере.

Вычисление инвариантных нулей большой ЭЭС. Найдем решение задачи вычисления инвариантных нулей большой ЭЭС, состоящей из 25 электрических станций. Математическая модель в фазовых координатах «фазный угол – скольжение генератора» ЭЭС в форме (2) имеет матрицы следующих размеров:

$$A \in \mathbb{R}^{50 \times 50}, \quad B \in \mathbb{R}^{50 \times 25}, \quad C \in \mathbb{R}^{20 \times 50}. \quad (34)$$

Портрет матрицы A приведен на рис. 1. При этом

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{25 \times 25} \\ I_{25} \end{pmatrix}, \quad C = (I_{20} \mid \mathbf{0}_{20 \times 30}). \quad (35)$$

Другими словами, на каждой из 25 электрических станций имеются соответствующие регулирующие устройства, измерение же фазовых координат осуществляется в режиме on-line только на 20 станциях.

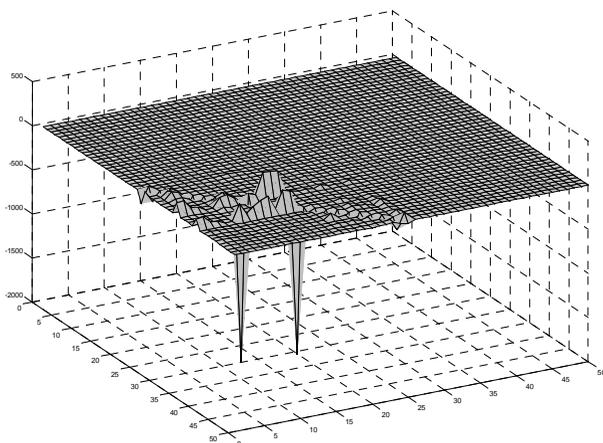


Рис. 1. Портрет матрицы A

¹ Соответствующие рассуждения справедливы и в условиях теоремы 2.

Таким образом, пучок матриц (7) в данном случае имеет размеры 70×75 и является прямоугольным.

Рассматриваемая модель статически устойчива, при этом собственные значения матрицы A равны:

$-1,8744 + 44,3150i$	$-1,8744 - 44,3150i$
$-1,8587 + 38,7106i$	$-1,8587 - 38,7106i$
$-0,2143 + 14,3166i$	$-0,2143 - 14,3166i$
$-0,1833 + 0,6054i$	$-0,1833 - 0,6054i$
$-0,1832 + 3,6364i$	$-0,1832 - 3,6364i$
$-0,2121 + 13,2120i$	$-0,2121 - 13,2120i$
$-0,1660 + 5,2006i$	$-0,1660 - 5,2006i$
$-0,1896 + 5,8082i$	$-0,1896 - 5,8082i$
$-0,1820 + 5,9270i$	$-0,1820 - 5,9270i$
$-0,2036 + 6,5300i$	$-0,2036 - 6,5300i$
$-0,1554 + 7,1809i$	$-0,1554 - 7,1809i$
$-0,2143 + 12,5901i$	$-0,2143 - 12,5901i$
$-0,2143 + 12,5074i$	$-0,2143 - 12,5074i$
$-0,2140 + 12,5272i$	$-0,2140 - 12,5272i$
$-0,2036 + 8,3079i$	$-0,2036 - 8,3079i$
$-0,1933 + 8,8567i$	$-0,1933 - 8,8567i$
$-0,1988 + 9,0764i$	$-0,1988 - 9,0764i$
$-0,2025 + 11,7488i$	$-0,2025 - 11,7488i$
$-0,1989 + 9,7436i$	$-0,1989 - 9,7436i$
$-0,1359 + 9,9271i$	$-0,1359 - 9,9271i$
$-0,2119 + 9,9859i$	$-0,2119 - 9,9859i$
$-0,1971 + 10,8907i$	$-0,1971 - 10,8907i$
$-0,2089 + 11,1342i$	$-0,2089 - 11,1342i$
$-0,2053 + 11,2304i$	$-0,2053 - 11,2304i$
$-0,2142 + 11,4511i$	$-0,2142 - 11,4511i$

Применение к модели ЭЭС стандартной процедуры вычисления инвариантных нулей *tzero* программной оболочки MATLAB дало отрицательный результат («множество нулей пусто»).

Используя операторы рандомизации и ортогонализации, сгенерируем множество матриц

$$\{T_i, i = \overline{1, k}\} = \text{Orth}_{25 \times 20}(\text{Rand}_{25 \times 20}) \quad (36)$$

и построим пучки матриц

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_{50} & \mathbf{B}\mathbf{T}_i \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{0}_{20 \times 20} \end{array} \right), \quad i = \overline{1, k}. \quad (37)$$

Для каждой из матриц (37) выполняется условие

$$\mathbf{C}\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{T}_i = \mathbf{0}_{20 \times 20}, \quad (38)$$

поэтому можно рассмотреть пучки матриц типа (32)

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_R^{\perp\mathbf{T}} \mathbf{A} \mathbf{C}_R^{\perp} - \lambda \mathbf{I}_{n-m} & \mathbf{C}_R^{\perp\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{B}} \\ \hline \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{C}_R^{\perp} & \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} \end{array} \right) \quad (39)$$

и проверить условие типа (33)

$$\det \left(\mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{C}_R^{\perp} \cdot \mathbf{C}_R^{\perp\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{B}} \right) \neq 0. \quad (40)$$

Поскольку в наших расчетах условие (40) выполняется, можно воспользоваться теоремой 1 и найти собственные значения матриц

$$\mathcal{A}_i = \hat{\mathbf{C}}_R^{\perp\mathbf{T}} \left(\mathbf{I}_{30} - \hat{\mathbf{B}}_i \left(\hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{B}}_i \right)^{-1} \hat{\mathbf{C}} \right) \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{C}}_R^{\perp}, \quad i = \overline{1, k}, \quad (41)$$

где

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{C}_R^{\perp\mathbf{T}} \mathbf{A} \mathbf{C}_R^{\perp}, \quad \hat{\mathbf{B}}_i = \mathbf{C}_R^{\perp\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{B}}_i, \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{C}_R^{\perp}. \quad (42)$$

Результаты вычислений собственных значений матриц (41) при $k = 500$ (т.е. 15 000 собственных значений) в виде их обобщенного портрета представлены на рис. 2.

Дальнейшие исследования обобщенного портрета показали, что в области D существуют три группы плотных скоплений претендентов на инвариантные нули (рис. 3). Центры этих скоплений [10] соответствуют комплексным частотам, на которых матрица (7) рассматриваемой модели ЭЭС имеет близкие к нулю минимальные сингулярные значения (данная матрица близка к потере ранга, что является практическим «индикатором» инвариантного нуля α^*). Таким образом, эти частоты можно принять за инвариантные нули ЭЭС (34).

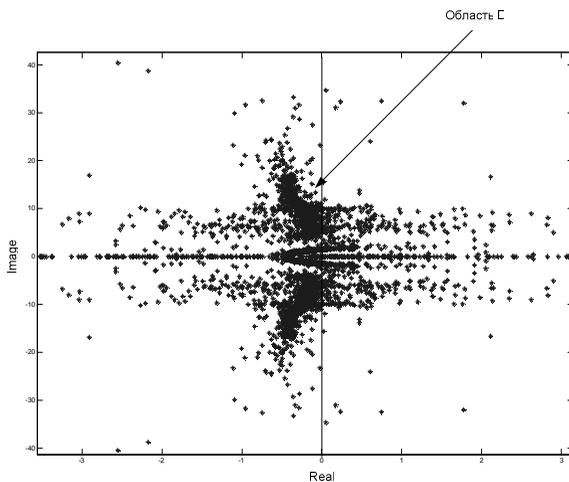


Рис. 2. Собственные значения матриц (41)

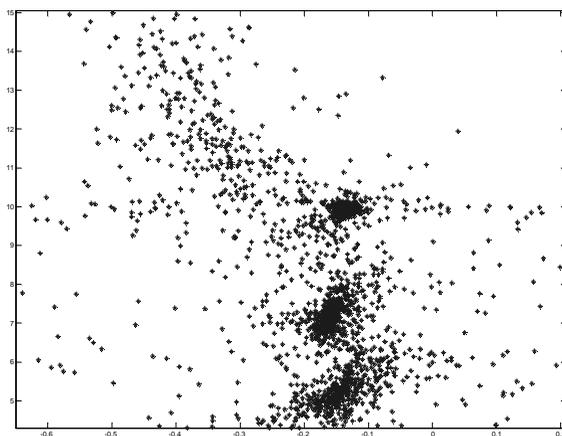


Рис. 3. Собственные значения матриц (41) в области D

С физической точки зрения вычисленные инвариантные нули соответствуют комплексным частотам, на которых происходит «запирание» электрической мощности в ЭЭС.

На рис. 4 приведена область D Объединенной энергетической системы Центра (ОЭС Центра) для $k = 100$. Здесь

$$A \in \mathbb{R}^{258 \times 258}, \quad B \in \mathbb{R}^{258 \times 129}, \quad C \in \mathbb{R}^{100 \times 258}.$$

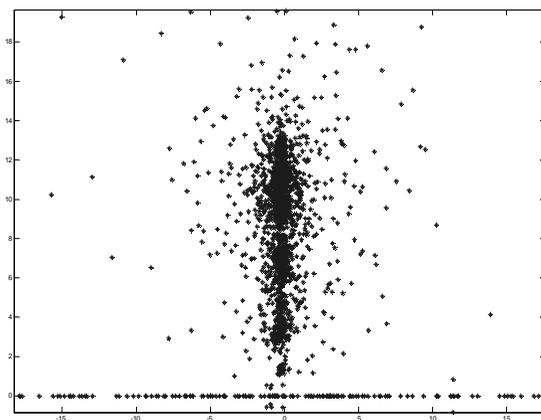


Рис. 4. Собственные значения матриц (41) ОЭС Центра в области D

Область D имеет несколько групп плотных скоплений претендентов на инвариантные нули. Как и в предыдущем случае, центры скоплений соответствуют комплексным частотам, на которых матрица (7) модели ОЭС Центра имеет близкие к нулю минимальные сингулярные значения. Таким образом, эти частоты также можно принять за инвариантные нули ОЭС Центра.

Библиографический список

1. **MacFarlane, A.G.J.** Pole and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex variable theory / A.G.J. MacFarlane, N. Kareanias // *Int. J. Contr.* – 1976. – Vol. 24. – No 1. – P. 33 – 74.
2. **Смагина, Е.М.** Вопросы анализа линейных многомерных объектов с использованием понятия нуля системы / Е.М. Смагина. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990.
3. **Мисриханов, М.Ш.** Квадратическая проблема собственных значений в электроэнергетических системах / М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // *АиТ.* – 2006. – № 5. – С. 24 – 47.
4. **Граничин, О.Н.** Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах / О.Н. Граничин, Б.Т. Поляк. – М.: Наука, 2003.
5. **Мисриханов, М.Ш.** Алгебраические и матричные методы в теории линейных ММО-систем / М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко // *Вестник ИГЭУ.* – 2005. – Вып. 5. – С. 196 – 240.
6. **Уонем, М.** Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход / М. Уонем. – М.: Наука, 1980.
7. **Мисриханов, М.Ш.** Классические и новые методы анализа многомерных динамических систем / М.Ш. Мисриханов. – М.: Энергоатомиздат, 2004.

8. **Воеводин, В.В.** Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984.
9. **Гантмахер, Ф.Р.** Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Физматлит, 2005.
10. **Загоруйко, Н.Г.** Прикладные методы анализа данных и знаний / Н.Г. Загоруйко. – Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999.

УДК 621.311

ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕСТА ПОВРЕЖДЕНИЯ ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧ

*А.Л. Куликов, М.Ш. Мисриханов, доктора техн. наук,
Д.М. Кудрявцев, канд. техн. наук*

Классификация методов определения мест повреждения (ОМП) линий электропередачи (ЛЭП) основывается, как правило, либо на базовых физических принципах ОМП (например, импульсные методы, волновые методы, метод стоячих волн и др.), либо на их частотных характеристиках (высокочастотные, среднечастотные, низкочастотные методы) [1, 2].

Импульсные и волновые методы основываются на локационном принципе, базирующемся на измерении времени запаздывания распространяющегося импульсного сигнала. При этом сигнал может быть получен искусственным путем (активная локация) – с помощью генератора зондирующих импульсов, подключенного к ЛЭП (импульсные методы), или возникать самостоятельно (пассивная локация), – например, при наличии короткого замыкания (КЗ) на ЛЭП (волновые методы).

Частотные методы [3] и метод стоячих волн [1, 2] основываются на измерении частоты электромагнитных колебаний. Измерение в этих методах может использоваться активно, когда подключается перестраиваемый генератор синусоидальных колебаний (метод стоячих волн), либо пассивно, когда измеряется частота свободных колебательных составляющих, возникающих в линии при коротких замыканиях. Следует заметить, что физическая основа частотного метода и волновых методов односторонних измерений практически одна и та же. Различие заключается в характере измерений: частотные измерения либо временные (например, период колебаний свободных составляющих).

Ниже рассматриваются частотно-временные методы ОМП ЛЭП, связанные с распространением многочастотного сигнала и имеющие локационный характер (основанные на измерении времени запаздывания сигнала). Эти методы в основном ориентированы на ОМП кабельных линий, передающих видео- или радиосигналы, однако могут применяться для диагностики ЛЭП. В электротехнической литературе [1, 2] не рассматривались.

Физическую основу частотно-временных методов (название введено авторами) составляют принципы, предложенные в 40 – 50-х годах прошлого столетия и реализованные в ряде изобретений [4 – 7]. Типовым представителем и пионерским техническим решением рассматриваемой группы методов является устройство [4], схемное решение которого, адаптированное к ЛЭП, представлено на рис. 1. Заметим, что такое схемное решение позволяет лишь уяснить физические принципы метода, но не является законченным и технически реализуемым.

На рис. 1 источники непрерывных синусоидальных колебаний частот f_1 и f_2 включены в линию и передают гармонические сигналы в обозначенном направлении. Отметим, что здесь и далее не указываются элементы присоединения к ЛЭП. В дальней точке эти гармонические колебания селективируются, усиливаются и выпрямляются, а результирующее напряжение подается на соответствующее реле.

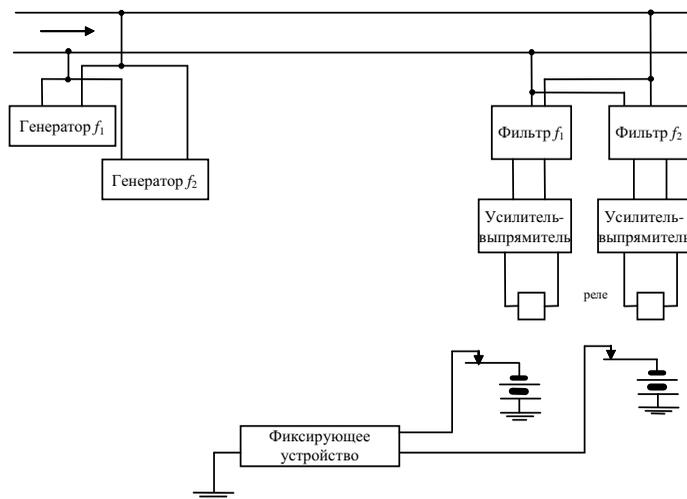


Рис. 1. Структурная схема устройства, реализующего частотно-временной метод ОМП

При отсутствии повреждений любой природы, являющихся причиной прерываний в передаче сигнала по ЛЭП, реле находятся в рабочем состоянии. Это означает, что токи от источников через контакты реле и фиксирующее устройство протекают на землю. Фиксирующее устройство находится в нерабочем состоянии.

При остановках генераторов (рис. 1), волновые колебания частот f_1 и f_2 прерываются в точке приема через время, зависящее от условий распространения для каждой из частот. Такие прерывания приводят к срабатыванию реле в каналах частот f_1 и f_2 и регистрации разности времени распространения колебаний f_1 и f_2 фиксирующим устройством.

Временная задержка в колебаниях частот f_1 и f_2 (рис. 2) может быть использована для ОМП. Известно, что скорость распространения гармонических колебаний на различных частотах зависит от состояния и параметров ЛЭП, и поэтому на основе контроля скорости распространения колебаний на различных частотах можно получить информацию об особенностях состояния линии.

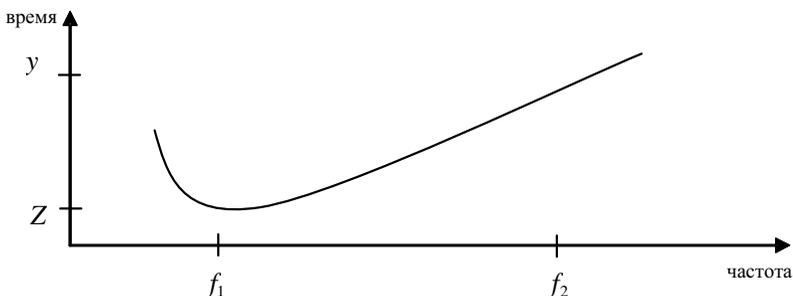


Рис. 2. Зависимость задержки времени распространения колебаний от частоты

Если колебания частот f_1 и f_2 прилагаются к начальной точке ЛЭП, имеющей длину L , то разница во времени прихода волн в дальней точке составляет

$$y - Z = t ,$$

где Z – время прихода волны f_1 ; y – время прихода волны f_2 ; t – разность времен.

Если колебания частот f_1 и f_2 прерываются в неизвестной точке X , лежащей между концами линии длиной L , то волна частоты f_1 имеет большую скорость распространения и поэтому будет принята первой

на конце линии. Волна частоты f_2 придет второй. Соответствующая разница времен составляет

$$y' - Z' = t'.$$

Соответственно, длина линии L пропорциональна разности времен прихода волн частот f_1 и f_2 , т.е. L пропорциональна t , а X пропорционально t' . После деления этих соотношений получим

$$\frac{L}{X} = \frac{t}{t'},$$
$$X = \frac{L \cdot t'}{t}.$$

Таким образом, место повреждения, причиной которого становятся прерывания, можно определить, зная длину ЛЭП L и, соответственно, временные запаздывания t' и t .

Другая группа частотно-временных методов [6, 7] использует специфику изменения скорости распространения волн при повреждении изоляции ЛЭП и другие ее особенности, связанные с возникновением нелинейной характеристики на одном из ее участков. Возможно возникновение на этих участках кратных и межмодуляционных частот, связанных с частотами оригинальных волновых колебаний.

Так, в одной из работ [7] предлагается следующий метод и устройство ОМП (рис. 3). Пусть несущая частота одного из колебаний – f_1 и соответствующая скорость распространения – V_1 , а для второго колебания – соответственно f_2 и V_2 . Пусть X – расстояние от нерегулярности ЛЭП до точки приема. Тогда $t_1 = \frac{X}{V_1}$ – время распространения колеба-

ний частоты f_1 до точки приема, а $t_2 = \frac{X}{V_2}$ – время распространения колебаний частоты f_2 . Скорости V_1 и V_2 принимаются неизменяющимися по всей длине L .

Расстояние до места повреждения, зависящее от регистрируемой разности времен, может быть рассчитано в соответствии с формулой

$$X = (t_1 - t_2) \frac{V_1 V_2}{V_2 - V_1}.$$

Работа устройства (рис. 3), реализующего такой способ ОМП, состоит в следующем. Источник колебаний – генератор частоты f_1 – подключается к линии через модулятор и фильтр. Он посылает в линию колебания частот $f_1 \pm m$, где m – низкая частота. Второй генератор формирует частоты $f_2 \pm f_1$ (f_2 – отличная от f_1 частота), которые, проходя через фильтр, направляются в линию. Вспомогательный источник генерирует колебания низких частот m , которые могут быть подключены через контакты выключателя к модулятору.

Электромагнитные волны от генератора $f_1 \pm m$, прошедшие через соответствующий фильтр и ЛЭП, выделяются фильтром с другой стороны линии, демодулируются колебаниями частоты f_1 , а также регистрируются блоком записи. При возникновении нелинейностей и нерегулярностей в линии происходит образование комбинационных частот колебаний $f_2 - f_1$ и $f_1 \pm m$. Одним из продуктов интермодуляции являются колебания частоты $f_2 - f_1 + f_1 \pm m = f_2 \pm m$. Эти частоты выделяются фильтром $f_2 \pm m$, а затем демодулируются с использованием генератора частоты f_2 и регистрируются блоком записи.

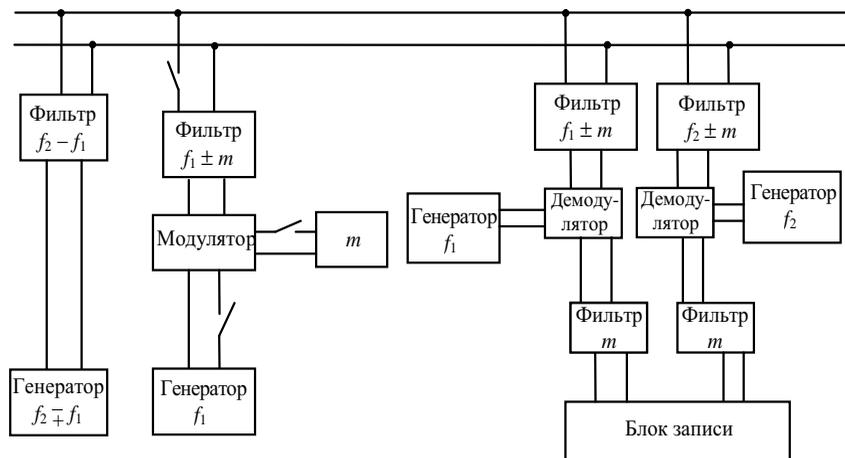


Рис. 3. Структурная схема устройства, реализующего частотно-временной метод ОМП

Перед началом работы (или в процессе работы) прибора производится тестирование. При этом замыкаются контакты выключателей (рис. 3), обеспечивая подачу колебаний в линию только частот $f_1 \pm m$. В нормальном режиме работы контакты выключателей разомкнуты.

Рис. 4 отображает типовой способ регистрации временной задержки в распространении колебаний с частотами f_1 и f_2 . Разница между моментами регистрации $t_2 - t_1$ для случая рис. 4 определяет расстояние X до места повреждения.

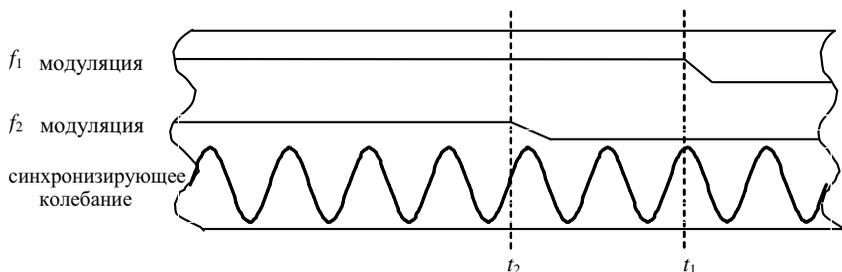


Рис. 4. Временные диаграммы частотно-временного метода

Следует отметить, что частотно-временные методы не нашли широкого применения для ОМП ЛЭП. Однако их можно применять в следующих ситуациях. Например, каналы дифференциально-фазной (ДФЗ) высокочастотной защиты линии высокочастотной (ВЧ) связи входят в технологические комплексы ЛЭП. Выход их из строя или возникновение соответствующих периодических прерываний не приводит к нарушениям передачи электрической энергии, но существенно сказывается на надежности и управляемости комплексов электротехнического оборудования. Применяемые методы контроля ДФЗ и ВЧ-связи направлены преимущественно на диагностирование элементов приемо-передающего оборудования, но не на выявление мест повреждений ЛЭП, приводящих, например, к нарушениям каналов связи. При этом актуальной является дистанционная диагностика, имеющая целью определение расстояния до таких повреждений, как набросы на ЛЭП, нарушения в целостности грозотроса, не приводящие к отключениям, нарушения в трактах ВЧ обходов каналов связи и др. Рассмотренные частотно-временные методы позволяют решать указанные задачи. Они могут применяться в совокупности с получением амплитудно-частотных характеристик каналов связи, формирование которых является необходимым элементом эксплуатационных работ.

Современные комплексные частотно-временные устройства с использованием цифровой обработки сигналов [8, 11, 12] могут быть реализованы согласно схеме рис. 5. Цифровой генератор формирует сигнал с постоянным амплитудно-частотным спектром $|G(f)|$ в некоторой полосе частот Π (рис. 6).

Такой сигнал позволяет получать амплитудно-частотную характеристику канала $|A(f)|$ с помощью дискретного или быстрого преобразования Фурье [8].

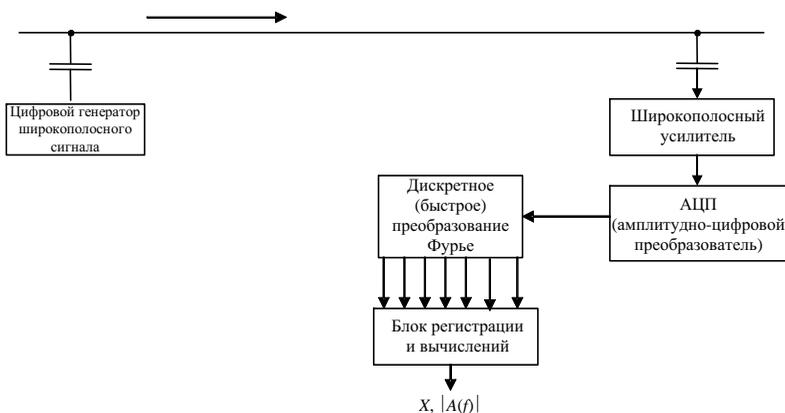


Рис. 5. Схема комплексного устройства, реализующего частотно-временные методы

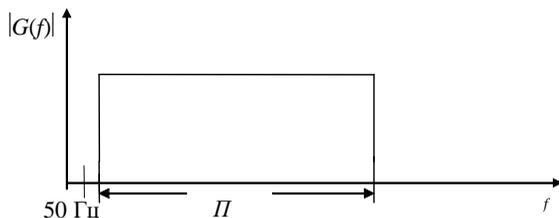


Рис. 6. Амплитудно-частотный спектр сигнала, излучаемого широкополосным генератором

Помимо этого, производится временная регистрация сигналов различных дискретных частот блоком регистрации и вычислений. В итоге получается множество оценок расстояния до места повреждения $\{X_i\}$, которое усредняется для обеспечения результирующей точной оценки X . Процедуры усреднения могут содержать различные статистические алго-

ритмы теории вероятностей [9, 10] с учетом специфики распространения и затухания генерируемого сигнала на различных частотах. Заметим, что схемный вариант устройства (рис. 5) может применяться и для реализации метода с использованием комбинационных (интермодуляционных) частот.

В заключение следует заметить, что цифровые устройства формирования и обработки сигналов для диагностики ЛЭП с использованием частотно-временных методов аналогичны компонентам локационной техники [11, 12], однако отличаются значительно меньшими требованиями по быстродействию. Они достаточно эффективно реализуются на широко распространенных компонентах микропроцессорной техники и не требуют значительных аппаратурных и стоимостных затрат.

Таким образом, рассмотренные частотно-временные методы ОМП ЛЭП образуют отдельную группу и могут применяться как самостоятельно, так и в комплексе с другими методами в устройствах диагностирования.

Библиографический список

1. **Шалыт, Г.М.** Определение мест повреждения в электрических сетях / Г.М. Шалыт. – М.: Энергоиздат, 1982. – 312 с.
2. **Висящев, А.Н.** Приборы и методы определения места повреждения на линиях электропередачи: учеб. пособие / А.Н. Висящев. – Ч. 2. – Иркутск: изд-во ИрГТУ, 2001. – 146 с.
3. **Небера, В.А.** Частотный метод определения места повреждения на линиях электропередач сверхвысоких напряжений / В.А. Небера, В.Н. Новелла // Электрические станции. – 1995. – № 2. – С. 36 – 46.
4. **Andrews, J.F.** Method and apparatus for locating transmission faults. – US Pat. № 2.315.383, 30.03.1943.
5. **Nyquist, H.** Method and apparatus for locating transmission faults. – US Pat. № 2.315.450, 30.03.1943.
6. **Gilbert, J.J.** Cable testing method by transmitting pulses of different rates of propagation. – US Pat. № 2.522.362, 12.09.1950.
7. **Bishop, W.M.** Method and means for locating nonlinearities in inaccessible cables. – US Pat. № 2.570.912, 09.10.1951.
8. **Нуссбаумер, Г.** Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления свертки: пер. с англ. / Г. Нуссбаумер. – М.: Радио и связь, 1985.
9. **Ван Трис, Г.** Теория обнаружения, оценок и модуляции: пер. с англ. / Г. Ван Трис. – Том 1. Теория обнаружения, оценок и линейной модуляции; под ред. В.И. Тихонова. – М.: Сов. радио, 1972. – 744 с.
10. **Бартон, Д.** Справочник по радиолокационным измерениям: пер. с англ. / Д. Бартон, Г. Вард; под ред. М.М. Вейсбейна. – М.: Сов. радио, 1976. – 392 с.
11. **Рабинер, Л.** Теория применения цифровой обработки сигналов: пер. с англ. / Л. Рабинер, Б. Гоулд. – М.: Мир, 1985.
12. **Применение** цифровой обработки сигналов: пер. с англ. / под ред. Э. Оппенгейма. – М.: Мир, 1980. – 552 с.