

На правах рукописи

КРАЙНОВА Лариса Николаевна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ДИНАМИКИ ТРУБОПРОВОДОВ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

Специальность 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Иваново 2011

Работа выполнена на кафедре «Теоретическая и прикладная механика» ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина».

Научный руководитель	кандидат технических наук, доцент Муницын Александр Иванович
Официальные оппоненты	доктор технических наук, профессор Мизонов Вадим Евгеньевич
	кандидат технических наук, доцент Федоров Юрий Александрович
Ведущая организация	Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

Защита состоится 21 декабря 2011 г. в 11.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.064.03 при ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет» по адресу: 153003, г. Иваново, ул. Рабфаковская, 34, корпус «Б», ауд. 237.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ивановского государственного энергетического университета.

Отзывы на автореферат, заверенные гербовой печатью, просим направлять по адресу: 153003, г. Иваново, ул. Рабфаковская, 34.  
Тел.: (4932) 38-57-12, факс (4932) 38-57-01  
E-mail: uch\_sovet@ispu.ru

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

А.А. Шульпин

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Гидравлическая система современных машин представляет собой сложную виброн нагруженную конструкцию, состоящую из прямых участков труб, поворотов, арматур, тройников, патрубков и средств крепления – опор. Основными источниками вибрации маслопроводов в большинстве случаев являются динамические нагрузки вращающихся неуравновешенных роторов двигателя, гидронасоса и гидромотора. В условиях резонанса конструкция подвергается опасному циклическому воздействию, которое может привести к усталостному разрушению. В связи с этим основной задачей динамического расчета трубопровода при проектировании является определение границ областей динамической неустойчивости и принятие мер, позволяющих избежать попадания расчетных параметров конструкции трубопровода в эти области.

При больших амплитудах колебаний возникает необходимость исследования нелинейных резонансных явлений в механических системах трубопроводов при воздействии внешних периодических нагрузок. Трубопровод под действием вибрационной нагрузки, действующей в одной плоскости, может совершать как плоские, так и пространственные колебания в зависимости от значений параметров задачи. Для различных режимов движения характерны качественно различные поля напряжений и соответственно различные прочностные характеристики. Поэтому разработка математических моделей трубопровода и расчет его режимов движения является актуальной проблемой.

**Цель работы** – разработка математических моделей для динамического расчета участка трубопровода с учетом давления жидкости, малой начальной кривизны и геометрической нелинейности, обусловленной неподвижными в продольном направлении опорами.

### **Задачи исследования.**

1. Разработка математической модели участка трубопровода в виде системы дифференциальных уравнений и граничных условий.
2. Решение полученных уравнений участка трубопровода для одномодового приближения в двух ортогональных плоскостях.
3. Оценка устойчивости полученных решений.
4. Получение экспериментальных результатов, отражающих закономерности движения трубопровода, имеющего малую начальную кривизну.
5. Анализ полученных результатов динамического расчета участка трубопровода и сопоставление с результатами эксперимента.
6. Программная реализация численного метода решения систем дифференциальных уравнений с учетом нескольких форм колебаний.

**Методы исследования.** В работе выполнены теоретические и экспериментальные исследования. Математическая модель колебаний трубопровода построена на основе уравнений механики твердого деформируемого тела. Уравнения, описывающие состояние трубопровода с учетом давления жид-

кости и малой начальной кривизны, решены методом Бубнова–Галеркина. В отдельных случаях получено аналитическое решение задачи. Для численного построения амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик использовался метод продолжения решения по параметру. Исследование устойчивости полученных решений выполнено на основе второго метода Ляпунова с использованием QR алгоритма.

Проверка основных теоретических положений выполнена на экспериментальном стенде для исследования вынужденных колебаний трубопровода, представляющем собой физическую модель трубопровода, имеющего малую начальную кривизну.

#### **Научная новизна.**

1. Разработана модель трубопровода с неподвижными в продольном направлении опорами, находящегося под действием давления жидкости и имеющего малую начальную кривизну, которая отличается от известных моделей учетом взаимосвязей колебаний в разных направлениях.

2. Разработан комбинированный метод решения уравнений, описывающих колебания трубопровода с учетом давления жидкости и малой начальной кривизны, использующий метод Бубнова–Галеркина, с помощью которого получены алгебраические уравнения, и метод продолжения решения по параметру для построения амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик.

3. Решена задача о свободных колебаниях трубопровода с шарнирно-неподвижными опорами с прогибом в одной плоскости и постоянным давлением жидкости, учитывающая пространственную форму колебаний, которая реализуется при наличии достаточно больших возмущений в плоскости, ортогональной плоскости начальной кривизны.

4. Выявлены и исследованы резонансные явления, возникающие при вынужденных колебаниях трубопровода в различных направлениях и заключающиеся в наличии нескольких плоских и пространственных форм движения трубопровода в области резонансов.

5. На испытательном стенде для исследования вынужденных колебаний трубопровода получены экспериментальные результаты, отражающие закономерности движения трубопровода, имеющего малую начальную кривизну.

**Достоверность** основных научных положений и выводов работы подтверждается их сравнением с экспериментальными данными, а также опытом практического использования разработок в производственной и научной областях. **Обоснованность** научных результатов подтверждается корректным использованием математического аппарата, адекватного решаемым задачам.

#### **Практическая ценность:**

– разработана методика расчета нелинейных колебаний трубопровода, позволяющая исследовать пространственные колебания трубопроводов с постоянным давлением жидкости в зависимости от параметров задачи;

– разработанный комплекс программ позволяет рассчитать вибрационную прочность трубопровода и определить его остаточный ресурс, а также

прогнозировать поведение исследуемой динамической системы во времени при изменении параметров модели;

– предложенные алгоритмы расчета целесообразно использовать при проектировании систем трубопроводов в инженерных конструкциях.

**Внедрение.** Научные и практические результаты работы внедрены на ОАО «Ивэнергомаш» (акт внедрения прилагается). Материалы диссертации использовались при написании учебного пособия «Нелинейные колебания», а также используются в учебном процессе ИГЭУ.

**Апробация работы.** Основные результаты, изложенные в диссертации, докладывались на Международной научно-технической конференции «XV Бенардосовские чтения» (г. Иваново, 2009), III региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов, ученых и специалистов (г. Воскресенск, 2009), Международной научно-технической конференции «Вибрация 2010. Управляемые вибрационные технологии и машины» (г. Курск, 2010), V региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов, ученых и специалистов (г. Воскресенск, 2011), Международной научно-технической конференции «XVI Бенардосовские чтения» (г. Иваново, 2011).

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано статей в журналах – 3, из них 3 по Перечню ВАК, сборниках трудов международных, всероссийских и региональных научно-технических конференций – 5 печатных работ, 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, 1 свидетельство о регистрации программы в государственном информационном фонде неопубликованных документов.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и библиографического списка из 91 наименования. Текст диссертации изложен на 111 страницах, содержит 42 рисунка, 4 таблицы, 2 приложения.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель и задачи исследований, показана новизна и практическая значимость полученных результатов.

**В первой главе** рассмотрена актуальность проблемы исследования нелинейных резонансных явлений, возникающих при колебаниях трубопровода, имеющего малую начальную кривизну и находящегося под воздействием вибрационной нагрузки. В плоской постановке задача о колебаниях трубопровода рассматривалась неоднократно, при этом расчетная модель трубопровода представляет собой стержень с опорами на концах. Изучению колебаний трубопроводов посвящены работы В.В. Болотина, М.А. Ильгамова, В.А. Светлицкого, В.И. Феодосьева и др. Анализ работ по исследованию пространственных нелинейных изгибных колебаний стержня показал, что существует взаимосвязь колебаний стержня в двух ортогональных направле-

ниях, что свидетельствует о существовании как плоских форм движения, так и пространственных. Для вынужденных колебаний в окрестности главного резонанса существует диапазон частот, при которых возможны как устойчивые колебания в одной плоскости с внешней нагрузкой, так и пространственные. В последнем случае результирующее движение поперечных сечений стержня происходит по эллипсу. При колебаниях трубопровода с неподвижными опорами, малой кривизной и наличием давления жидкости также существует нелинейная взаимосвязь колебаний в двух ортогональных направлениях, что приводит к неоднозначности решений.

Для решения поставленной задачи сформулирована краевая задача о колебаниях трубопровода с неподвижными в продольном направлении опорами с учетом давления жидкости и малой начальной кривизной. Система дифференциальных уравнений, описывающая вынужденные колебания трубопровода в двух ортогональных плоскостях, имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha^4 \ddot{v} + v^{IV} + \alpha^2 \beta (v'' + v_0'') + \tau v^{IV} + \alpha^4 \sigma \dot{v} - 4\gamma_0 \varepsilon_0 (v'' + v_0'') &= q_v(x) \cos(\theta t + \psi_1), \\ \alpha^4 \ddot{w} + w^{IV} + \alpha^2 \beta (w'' + w_0'') + \tau w^{IV} + \alpha^4 \sigma \dot{w} - 4\gamma_0 \varepsilon_0 (w'' + w_0'') &= \\ &= q_w(x) \cos(\theta t + \psi_2), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 ((v')^2 + (w')^2 + 2v'v_0' + 2w'w_0') dx,$$

где  $v, w$  – безразмерные перемещения точек оси трубопровода вдоль осей  $y$  и  $z$ ;  $v_0(x)$  – начальный прогиб в плоскости  $xu$ ;  $w_0(x)$  – в плоскости  $xz$ , отнесенные к длине трубы  $L$ ;  $\varepsilon_0$  – деформация оси стержня. (Штрихами обозначено дифференцирование по безразмерной координате  $x$ , направленной вдоль оси стержня; точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени  $t^* = \omega_1 t$ , где  $\omega_1$  – первая собственная частота колебаний прямолинейной трубы);  $\tau, \sigma$  – безразмерные коэффициенты диссипации в модели внутреннего и внешнего трения;  $q_v, q_w$  – безразмерная распределенная нагрузка; также введены безразмерная нелинейность  $\gamma_0$  и безразмерное давление  $\beta$ :

$$\gamma_0 = FL^2/(4I), \quad \beta = \pi p L^2 r^2 / \alpha^2 EI,$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения трубы;  $I$  – осевые моменты инерции сечения,  $I_y = I_z = I$  для правильных сечений в виде кольца;  $\alpha$  – корень уравнения частот;  $p$  – избыточное давление рабочей жидкости,  $r$  – внутренний радиус сечения;  $E$  – модуль упругости материала трубы;  $q_v(x) \cos(\theta t + \psi_1)$  и  $q_w(x) \cos(\theta t + \psi_2)$  – внешние гармонические нагрузки во взаимно перпендикулярных направлениях.

Система (1) дополнена граничными условиями для элемента трубы с двумя заделками:  $v = w = v' = w' = 0$  при  $x=0,1$ ; для элемента трубы с шарнирно неподвижными опорами:  $v = w = v'' = w'' = 0$  при  $x=0,1$ .

Во второй главе рассмотрены пространственные нелинейные колебания трубопровода с шарнирно-неподвижными опорами с учетом давления жидкости и начального прогиба в одномодовом приближении.

Решения (1) представлены в виде

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \varphi_1(t)V(x) = \varphi_1(t) \sin(\pi x), \\ w(x, t) &= \varphi_2(t)V(x) = \varphi_2(t) \sin(\pi x), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $V(x) = \sin(\pi x)$  – первая форма колебаний стержня.

Начальный прогиб трубопровода совпадает с первой формой колебаний:

$$\begin{aligned} v_0(x, t) &= \varphi_{01}V_0(x) = \varphi_{01} \sin(\pi x), \\ w_0(x, t) &= \varphi_{02}V_0(x) = \varphi_{02} \sin(\pi x), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varphi_{01}, \varphi_{02}$  – начальные прогибы в середине участка трубопровода в плоскостях  $xu$  и  $xz$  соответственно. В результате подстановки решений (2) и (3) в (1) и использования метода Бубнова–Галеркина, получена система нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + (1 - \beta)\varphi_1 + \eta\dot{\varphi}_1 + \gamma\varphi_1(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 3\varphi_{01}\varphi_1 + 2\varphi_2\varphi_{02} + 2\varphi_{01}^2) + \\ + 2\gamma\varphi_{01}\varphi_{02}\varphi_2 + \gamma\varphi_{01}\varphi_2^2 - \beta\varphi_{01} = f_1 \cos(\theta t + \psi_1), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_2 + (1 - \beta)\varphi_2 + \eta\dot{\varphi}_2 + \gamma\varphi_2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 3\varphi_{02}\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_{01} + 2\varphi_{02}^2) + \\ + 2\gamma\varphi_{01}\varphi_{02}\varphi_1 + \gamma\varphi_{02}\varphi_1^2 - \beta\varphi_{02} = f_2 \cos(\theta t + \psi_2), \end{aligned}$$

где  $\gamma = \gamma_0$ ,  $f_1, f_2$  – амплитуды гармонического возбуждения, соответствующие первой форме колебаний,  $\eta = \tau + \sigma$  – параметр диссипации.

Рассмотрены колебания трубы с начальным прогибом в одной плоскости ( $\varphi_{02} = 0$ ). Функции  $T$ -периодических решений представлены в виде отрезка ряда Фурье:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= A_1 \cos(\theta t) + B_1 \sin(\theta t), \\ \varphi_2(t) &= C_2 + A_2 \cos(\theta t) + B_2 \sin(\theta t). \end{aligned} \quad (5)$$

С применением процедуры Бубнова–Галеркина, получена система алгебраических уравнений относительно  $A_1, B_1, C_2, A_2, B_2$ .

Для решения задачи о собственных частотах рассмотрена система (4) без учета трения и внешнего возбуждения ( $\eta = 0, f_1 = f_2 = 0$ ). После замены  $\theta$  на  $\omega$  в (5), и полагая  $B_1 = B_2 = 0$ , произведена линеаризация полученных алгебраических уравнений системы. Зависимости  $\omega_1(\beta), \omega_2(\beta)$  приведены на рис. 1 и рис. 2. Установлено, что учет внутреннего давления и исходной кривизны трубы значительно влияет на спектр собственных частот. Даже в области малых значений давления жидкости собственные частоты трубы в двух ортогональных направлениях различны. Кривым 1 соответствует значение начальной кривизны  $\varphi_{02} = 3 \cdot 10^{-7}$ , кривым 2 –  $\varphi_{02} = 1 \cdot 10^{-4}$ , 3 –  $\varphi_{02} = 3 \cdot 10^{-4}$ , 4 –  $\varphi_{02} = 1 \cdot 10^{-3}$ , 5 –  $\varphi_{02} = 3 \cdot 10^{-3}$ .

Решена задача о свободных нелинейных колебаниях трубопровода с шарнирно-неподвижными опорами с прогибом в одной плоскости и учетом постоянного давления жидкости. Для этого в решении (5) принято  $B_2 = 0$ . Из решения нелинейных алгебраических уравнений получены зависимости

$A_1(\omega)$ ,  $B_1(\omega)$ ,  $C_2(\omega)$ ,  $A_2(\omega)$ . Установлено, что наряду с двумя плоскими формами колебаний в двух ортогональных плоскостях существует пространственная форма колебаний, которая реализуется при наличии достаточно больших возмущений в плоскости, ортогональной плоскости начальной кривизны (рис. 3,4).

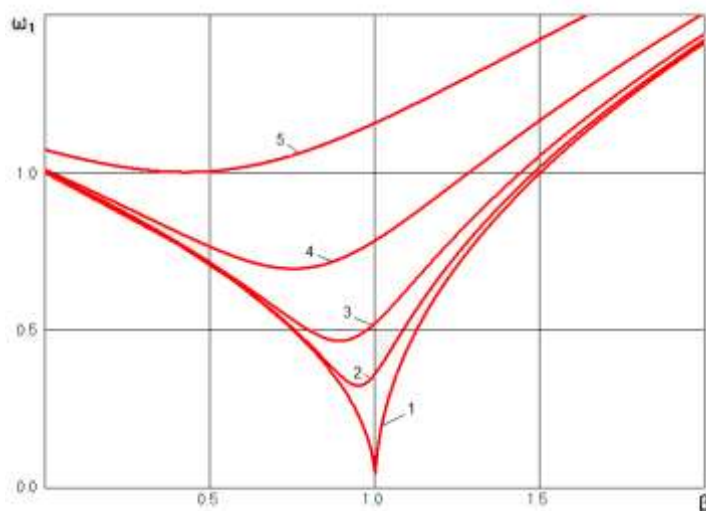


Рис. 1. Зависимость собственной частоты колебаний трубы в плоскости прогиба от давления

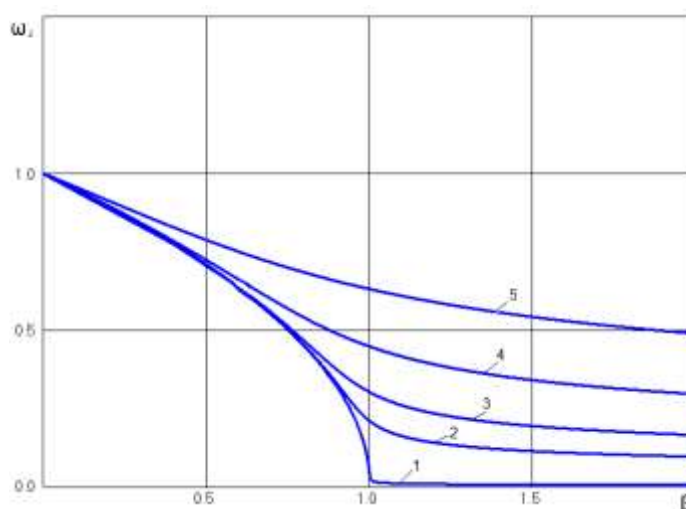


Рис. 2. Зависимости собственной частоты колебаний трубы в плоскости, ортогональной плоскости прогиба, от давления

На рис. 3,4 кривой 1 обозначена зависимость амплитуды колебаний в плоскости кривизны трубопровода от безразмерной собственной частоты колебаний  $A_2(\omega)$ , кривой 2 – зависимость амплитуды колебаний в плоскости, ортогональной плоскости кривизны трубопровода, от частоты  $A_1(\omega)$ , кривыми 3 и 4 зависимости  $A_2(\omega)$  и  $B_1(\omega)$ , соответствующие пространственным формам колебаний элемента трубопровода, при котором точки средней линии движутся по окружности, кривыми 5 и 6 зависимости постоянной составляющей для плоской и пространственной формы колебаний  $C_2(\omega)$ .



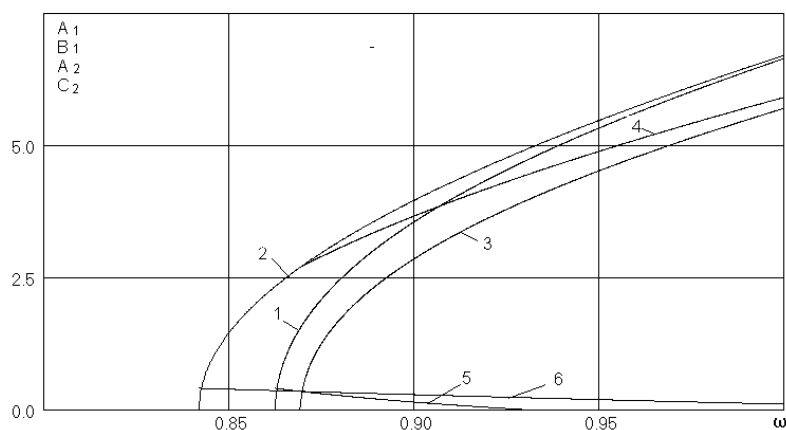


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики при  $\beta=0,3$

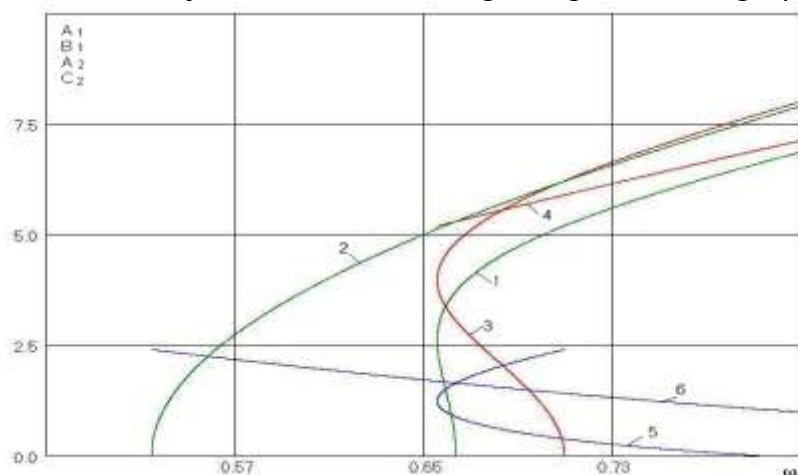


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики при  $\beta=0,8$

Сформулирована и решена задача о вынужденных колебаниях трубопровода. Численным методом продолжения решений по параметру получено решение задачи о колебаниях трубопровода с шарнирно-неподвижными опорами под действием гармонического возбуждения в плоскости начального прогиба и в ортогональной к ней плоскости в одномодовом приближении (рис. 5,6).

При возбуждении колебаний в плоскости, ортогональной плоскости прогиба, выявлено, что при малых значениях амплитуды возбуждения колебания трубы происходят исключительно в плоскости возбуждения. При увеличении амплитуды возбуждения в области резонанса взаимодействие между формами колебаний приводит к появлению пространственных режимов движения (кривые 1, 2 на рис. 5).

При возбуждении колебаний в плоскости прогиба трубопровода (рис. 6) наряду с решением, соответствующим колебаниям трубопровода в плоскости нагрузки (кривая 1), получено решение для пространственной формы колебаний трубы (кривые 2, 3).

Сравнительный анализ двух случаев нагружения трубопровода (в плоскости кривизны трубопровода и в плоскости, ортогональной плоскости кривизны), имеющего начальный прогиб, показал, что в случае вибрационного нагружения в плоскости, ортогональной плоскости кривизны, в области ре-

зонанса существует два устойчивых решения, соответствующие вращению сечений трубопровода в двух противоположных направлениях. При нагружении в плоскости кривизны существует еще одно устойчивое решение, соответствующее колебаниям трубопровода в плоскости действия нагрузки с большими амплитудами. По условию прочности конструкции, при достаточно большом уровне возбуждения колебаний, последний случай нагружения является более опасным.

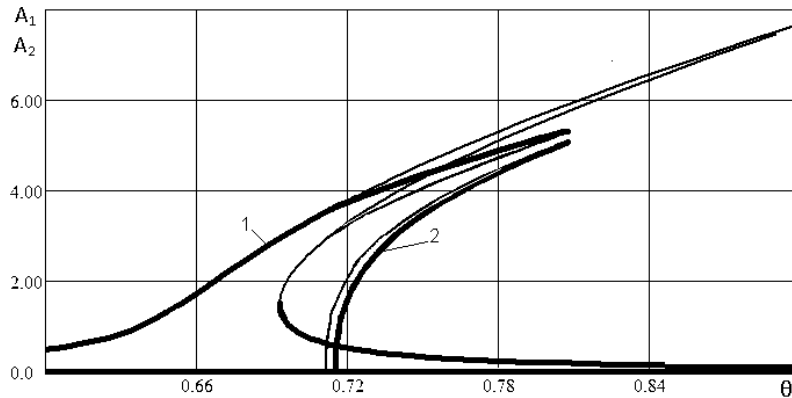


Рис. 5. Амплитудно-частотная характеристика при возбуждении колебаний в плоскости, ортогональной плоскости прогиба при  $f_1 = 4 \cdot 10^{-5}$ ,  $\beta=0,6$

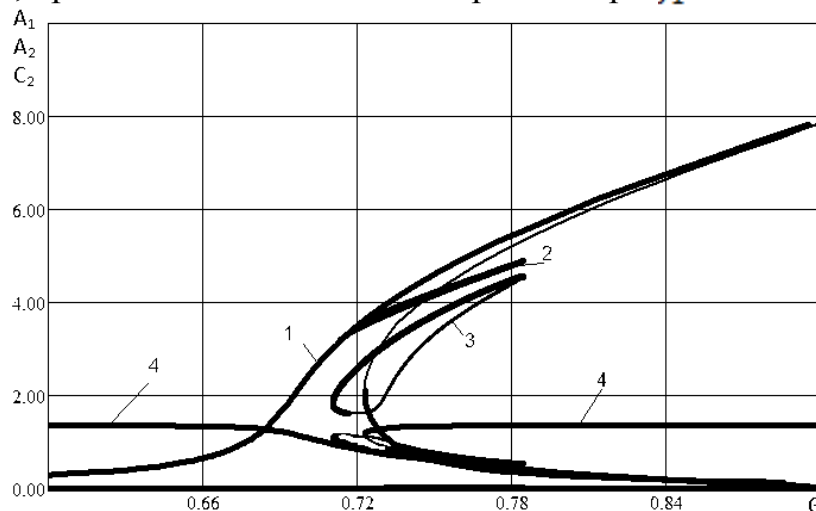


Рис. 6. Амплитудно-частотная характеристика при возбуждении колебаний в плоскости прогиба при  $f_2 = 4 \cdot 10^{-5}$ ,  $\beta=0,6$

**Третья глава** посвящена разработке программного комплекса, предназначенного для решения задач о свободных или вынужденных колебаниях участка трубопровода с неподвижными в продольном направлении опорами с учетом геометрических параметров трубопроводной системы. Для решения поставленной задачи требуется решить систему нелинейных дифференциальных уравнений с граничными условиями. В случае пространственных изгибных колебаний трубопровода число уравнений  $n = 2$  и число граничных условий  $s = 8$ .

В данной работе для решения задач использован метод Бубнова-Галеркина. Для конечного числа членов ряда краевая задача сведена к систе-

ме с конечным числом степеней свободы, решение которой может быть получено методом продолжения решения по параметру. Приведенный алгоритм, включая исследование устойчивости полученных решений, реализован в пакете прикладных программ, описание которого приведено в данной главе.

Для решения задачи необходимо описать систему уравнений, граничные условия и выбрать базисные функции по координатам и времени. Исходные данные о решаемой краевой задаче заносятся пользователем в файл данных. Операторы дифференциальных уравнений в частных производных (1) записываются в виде

$$L_i(v, w, x, t) = 0. \quad (6)$$

Согласно методу Галеркина решение представляется в виде

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \sum_{p=1}^P \varphi_{2p}(t) V_p(x), \\ w(x, t) &= \sum_{p=1}^P \varphi_{2p}(t) V_p(x), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $V_p(x)$  – базисные функции по координате, которые должны быть линейно независимыми при любых  $P$ , удовлетворять всем граничным условиям и быть представительными, т.е. любая допустимая функция должна аппроксимироваться данной системой функций с заданной степенью точности.

Для стержня с шарнирно-неподвижными опорами  $V_p(x) = \sin p\pi x$ ,  $p = 1, 2$ . Для стержня с двумя заделками

$$\begin{aligned} V_p(x) &= V^* [(sina - sha)(chax - cosax) + \\ &+ (cha - cosa)(shax - sinax)], \end{aligned}$$

где  $\alpha = 4,730$ ,  $V^* = 0,0173$  – для первой формы колебаний;  $\alpha = 7,853$ ,  $V^* = 0,0007776$  – для второй формы колебаний;  $\alpha = 10,995$ ,  $V^* = 0,0000335$  – для третьей формы колебаний трубопровода и т.д.

Формы колебаний нормированы из условия  $\int_0^1 V_p^2 dx = 1$ .

Начальный прогиб трубопровода  $v_0$  и  $w_0$  также раскладывается по базисным функциям. В данной работе полагаем, что начальный прогиб совпадает с первой базисной функцией:

$$\begin{aligned} v_0(x, ) &= \varphi_{01} V_0(x), \\ w_0(x, ) &= \varphi_{02} V_0(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в уравнения (6) и удовлетворяя условиям ортогональности к базисным функциям по координате, получаем систему нелинейных уравнений относительно вектор-функции  $\varphi_{s,n}(t)$  ( $s = 1, 2$ ;  $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $N = P$ ). Неизвестная вектор-функция  $T$ -периодических решений записывается в виде отрезка ряда Фурье:

$$\varphi_{s,n}(t) = \sum_{m=1}^M A_{s,n,m} f_m(t). \quad (9)$$

Удовлетворяя условиям ортогональности к базисным функциям по времени, получаем систему нелинейных уравнений относительно частоты и амплитуд колебаний  $A_{s,nm}$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k,n_1,m_1} C_k D_{i,k,p,n} S_{k,q,m} \theta^l A_{s,n,m} + \\
& + \sum_{k,n_1,n_2,m_1,m_2} C_k D_{i,k,p,n_1,n_2} S_{k,q,m_1,m_2} A_{s_1,n_1,m_1} A_{s_2,n_2,m_2} + \\
& + \sum_{k,n_1,n_2,n_3,m_1,m_2,m_3} C_k D_{i,k,p,n_1,n_2,n_3} S_{k,q,m_1,m_2,m_3} A_{s_1,n_1,m_1} A_{s_2,n_2,m_2} A_{s_3,n_3,m_3} = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Индекс  $i$  соответствует номеру уравнения (6);  $k$  – номеру слагаемого в уравнениях (6);  $p, q$  – номерам базисных функций в условиях ортогональности по функциям координат и времени;  $s$  – это номер перемещений  $v$  и  $w$  в уравнениях (1);  $n$  – номер базисной функции в разложении по координате (7);  $m$  – номер базисной функции в разложении по времени (9). Число неизвестных равно  $2PM$  и совпадает с числом уравнений системы. Многомерные массивы  $D$  и  $S$  формируются методом прямого численного интегрирования. Практически все интегралы могут быть получены аналитически, однако использование численных методов позволяет избавиться от рутинных выкладок.

Решение начинается с точки  $\theta^0, A_{nm}^0$  ( $n=1,2,\dots,N; m=1,2,\dots,M$ ), которая должна быть решением системы (10). Как правило, такую точку всегда можно найти из решения линейной задачи для малых амплитуд колебаний. Если среднеквадратичная относительная погрешность решения меньше допускаемой точности  $r_0$ , то процесс вычислений продолжается. По заданному значению ведущей переменной  $\Delta\theta^j$  или одному из  $\Delta A_{nm}^j$  определяются остальные приращения неизвестных и соответственно находятся частоты и амплитуды колебаний. Если погрешность больше допускаемой, то делается попытка уменьшить шаг ведущей переменной. В силу неоднозначности получаемых амплитудно-частотных зависимостей, это не всегда приводит к успеху. В этом случае в качестве ведущей переменной принимается та, изменение которой было максимальным на предыдущем шаге. В особых точках определитель системы (10) равен нулю и возможно ветвление решений. В окрестности этих точек необходимо проводить поиск всех возможных решений. Исследование устойчивости полученных решений производится на основе второго метода Ляпунова с использованием QR алгоритма. По результатам вычислений строятся АЧХ отдельных гармоник колебаний либо АЧХ конкретной точки элемента трубопровода, формы движения элемента трубопровода для любой точки АЧХ.

**В четвертой главе** приведены результаты исследования пространственных нелинейных колебаний трубопровода с жесткими опорами.

Для физического моделирования задачи на кафедре «Теоретическая и прикладная механика» ИГЭУ разработан лабораторный стенд. Моделью трубопровода с неподвижными в продольном направлении опорами является стержень кольцевого или сплошного сечения, имеющий двустороннее жесткое закрепление. Внутреннее давление моделируется продольной сжимающей силой.

С помощью программного обеспечения тестовый сигнал синтезируется в цифровом виде, преобразуется в аналоговый сигнал с помощью ЦАП и подается на усилитель мощности, далее на электромагнитный вибровозбудитель, воздействующий на стержень. Регистрация колебаний производится датчиками виброускорений KB11 7083 в двух направлениях – в нормальном и тангенциальном. Датчики преобразуют механические колебания стержня в электрический сигнал. Производится математическая обработка дискретизированного сигнала в режиме реального времени методом синхронной фильтрации. Выделяется первая гармоническая составляющая исследуемого сигнала, и строятся амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики, при этом измеряется разность фаз между тестовым сигналом и первой гармоникой вибрационного сигнала. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики выводятся на экран компьютера, а также сохраняются на жестком диске в виде файла текстового формата для дальнейшей обработки.

В работе приведены результаты испытаний модели трубопровода (диаметр 5 мм, длина 1 м), имеющего начальный прогиб с сжимающей силой, моделирующей внутреннее давление. На рис. 7 представлена амплитудно-частотная характеристика модели трубопровода в плоскости возбуждения от частоты возбуждения, на рис. 8 – в плоскости, ортогональной плоскости возбуждения, от частоты возбуждения. Жирными линиями показаны устойчивые решения. В результате эксперимента, представленного на рисунках точками разного диаметра, получены неоднозначные решения, характерные для нелинейных колебаний трубопровода. Существует диапазон частот, в котором в зависимости от внешних возмущений возможны как пространственные, так и плоские режимы колебаний.

На рис. 7 и рис. 8 пространственная форма колебаний представлена кривой 1 до точки  $A_1$ . В точке  $A_1$  происходит скачок, далее движение соответствует устойчивому решению  $A_2 - A_5$ , при этом точки поперечного сечения совершают движение по эллипсу, при дальнейшем увеличении частоты возбуждающей силы – по окружности.

В другом случае колебания трубопровода являются плоскими и происходят исключительно в плоскости возбуждения колебаний до частоты возбуждающей силы  $\approx 23$  Гц. На рис. 7 и рис. 8 плоская форма колебаний представлена кривой 1 от точки  $A_3$  до точки  $A_4$ . При увеличении частоты происходит скачок на пространственную форму колебаний, при этом точки средней линии трубопровода начинают движение по эллипсу с почти равными полуосями. Вблизи максимума пространственной ветви АЧХ движения сечений стержня происходят по окружности.

Данные эксперимента качественно подтверждают теоретические расчеты.

Проведено исследование сходимости полученных решений и сопоставление результатов расчета в одномодовом приближении с результатами расчета с учетом трех гармоник в отрезке ряда Фурье и трех форм колебаний. Установлено, что имеется сходимость численного метода решений. Достаточную

точность дает решение с учетом только первой моды и первых двух членов ряда Фурье.

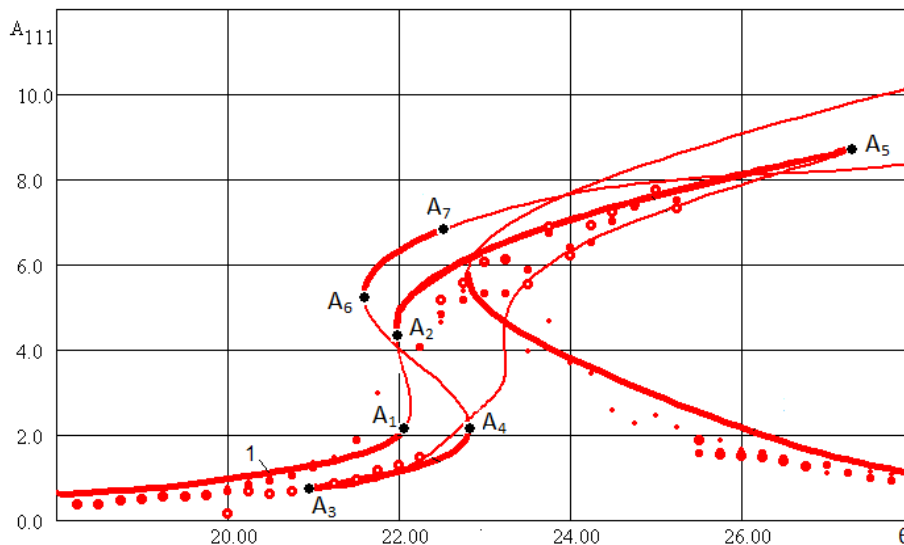


Рис. 7 Амплитудно-частотная характеристика в плоскости возбуждения колебаний при  $\beta = 1,4$

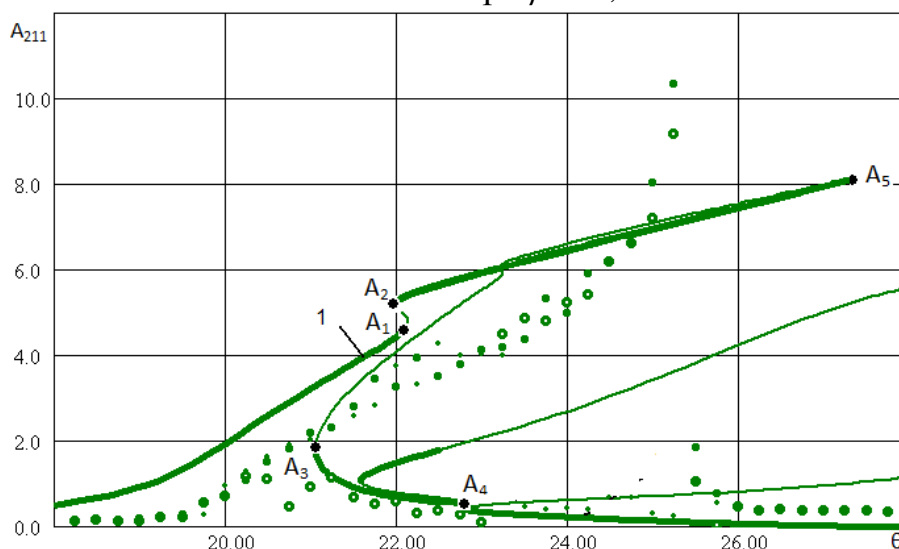


Рис. 8 Амплитудно-частотная характеристика в плоскости, ортогональной плоскости возбуждения колебаний при  $\beta = 1,4$

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ

1. Разработана математическая модель пространственных нелинейных колебаний трубопроводов с учетом избыточного давления жидкости и малой начальной кривизны.

2. Получено аналитическое решение задачи о свободных колебаниях трубопровода с шарнирно-неподвижными опорами с прогибом в одной плоскости и учетом постоянного давления жидкости. Следствием близких значений собственных частот колебаний трубопровода является существование как плоских форм колебаний в двух ортогональных плоскостях, так и пространственной формы колебаний, которая реализуется при наличии достаточно

больших возмущений в плоскости, ортогональной плоскости начальной кривизны.

3. Получено численное решение задачи о вынужденных колебаниях трубопровода, имеющего малую начальную кривизну. Для трубы с шарнирно-неподвижными в продольном направлении опорами задача решена в аналитическом виде. Исследованы резонансные явления, заключающиеся в возможности существования взаимосвязи между колебаниями трубопровода в различных направлениях и наличии нескольких плоских и пространственных форм движения в области главного резонанса.

4. Разработан пакет прикладных программ решения краевой задачи о колебаниях трубопровода. Решение задачи получено методом Бубнова–Галеркина с учетом нескольких форм колебаний и нескольких гармоник в отрезке ряда Фурье. Для численного построения амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик использовался метод продолжения решения по параметру.

5. Проведенное исследование пространственных нелинейных колебаний трубопровода позволяет получить зависимости амплитуд и фаз колебаний от частоты внешнего возбуждения в зависимости от геометрических параметров задачи, величины избыточного давления жидкости и параметров диссипации, рассчитать вибрационную прочность трубопровода, прогнозировать поведение исследуемой динамической системы во времени при изменении параметров движения.

## **СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ**

1. Муницын, А.И. Нелинейные колебания элемента трубопровода малой кривизны /А.И. Муницын, Л.Н. Крайнова //Вестник ИГЭУ. – 2009. – С. 42–45.

2. Крайнова, Л.Н. Пространственные нелинейные колебания трубопровода при гармоническом возбуждении/ Л.Н. Крайнова, А.И. Муницын // Машиностроение и инженерное образование. – 2010. – № 2. – С. 46–51.

3. Муницын, А.И. Пространственные нелинейные колебания стержня с двумя заделками/ А.И. Муницын, Л.Н. Крайнова, Н.А. Сабанеев // Вестник ИГЭУ. – 2010. – Вып. 2. – С. 63–65.

### **Публикации в прочих изданиях**

4. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011610386. Расчет нелинейных колебаний трубопровода/ А.И. Муницын, Л.Н. Крайнова; патентообладатель ГОУВПО ИГЭУ. – № 2011610386, зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 11.01.2011.

5. Муницын, А.И. Расчет нелинейных колебаний трубопровода/ А.И. Муницын, Л.Н. Крайнова //Программа для ЭВМ зарегистрирована в государственном информационном фонде неопубликованных документов ФГНУ «Центр информационных технологий и систем органов исполнительной власти» 03.11.10, инвентарный номер ВНТИЦ 50201001640.

6. Крайнова, Л.Н. Пространственные нелинейные колебания трубопроводов /Л.Н. Крайнова, А.И. Муницын //Сб. науч. статей в 2 ч. Междунар. науч.-техн. конф. «Вибрация, 2010. Управляемые вибрационные технологии и машины». – Курск, 2010. – С. 252–257.

7. Крайнова, Л.Н. Нелинейные колебания трубопроводов высокого давления / Л.Н. Крайнова // Сб.науч.докл. III региональной науч.-практ. конф. студентов, аспирантов, ученых и специалистов. – Воскресенск. – 2009. – С. 219.

8. Крайнова, Л.Н. Собственные частоты колебаний элемента трубопровода малой кривизны/ Л.Н. Крайнова // Тез. докл. Междунар. науч.-техн. конф. «Состояние и перспективы развития электротехнологии» (XV Бенардосовские чтения). – Иваново. – 2009. – Том II. – С. 74.

9. Крайнова, Л.Н. Экспериментальные исследования вынужденных колебаний трубопровода/Л.Н. Крайнова, Ф.Б. Огурцов // Тез. докл. Междунар. науч.-техн. конф. «Состояние и перспективы развития электротехнологии» (XVI Бенардосовские чтения). – Иваново. – 2011. – Том III. – С. 25–26.

10. Крайнова, Л.Н. Исследование пространственных колебаний трубопровода/ Л.Н. Крайнова // Сб. науч. докл. V региональной науч.-практ. конф. студентов, аспирантов, ученых и специалистов. – Воскресенск. – 2011. – С. 63–64.

**КРАЙНОВА Лариса Николаевна**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ДИНАМИКИ ТРУБОПРОВОДОВ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ**

**АВТОРЕФЕРАТ**

**диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук**

Подписано в печать Формат 60x84 1\16.  
Печать плоская. Усл. печ. л. 0,93. Тираж 100 экз. Заказ №  
ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет  
имени В.И. Ленина»  
Отпечатано в УИУНЛ ИГЭУ  
I 53003, г. Иваново, ул. Рабфаковская, 34.