© «Вестник ИГЭУ» Вып. 2 2009 г.

Расчет электромагнитного поля дипольных источников с использованием векторных потенциалов

Кадников С.Н., д-р техн. наук, Веселова И.Е., ст. преп.

Рассматриваемая методика расчета электромагнитного поля электрического диполя в однородной среде с одноосной анизотропией электрических и магнитных свойств. Для векторного потенциала получены выражения в элементарных функциях. Показано, что результат расчета поля с использованием векторного потенциала не зависит от способа калибровки.

Ключевые слова: расчет поля, электромагнитное поле диполя, анизотропная среда, векторный потенциал, калибровка.

Calculation of electromagnetic field of dipole source using vector potential

Kadnikov S.N., Veselova I.E.

The design procedure of an electromagnetic field of an electric dipole in a homogeneous environment with anisotropy of electric and magnetic properties is considered. For vector potential expressions with elementary functions were found. It is shown that the result of calculation of a field with use of vector potential does not depend on a way of calibration.

Keywords: field calculation, electromagnetic field of dipole, anisotropic medium, vector potential, calibration.

Методика расчета электромагнитного поля диполей электрического типа в однородной одноосной анизотропной среде основана на использовании векторных потенциалов. Данная методика является естественным развитием схемы расчета электромагнитного поля в однородной изотропной среде [1]. Целесообразность использования векторных потенциалов обусловлена сложностью правых частей уравнений второго порядка относительно $\bar{E}$ и $\bar{H}$, которые возникают при прямом решении уравнений Максвелла. Кроме того, их применение повышает точность расчета магнитных потоков и индуктивностей, поскольку не требует предварительного вычисления поля. С теоретической точки зрения расчет векторных потенциалов представляет интерес при исследовании эффекта Ааронова-Бома [2].

В изотропной среде фактически единственным эффективным (с расчетной точки зрения) способом введения связи между векторным и скалярным потенциалом является калибровка Лоренца. При этом возникают, как известно, три отдельных уравнения второго порядка относительно декартовых компонент векторного потенциала. В отличие от этого в анизотропной среде связь между векторным и скалярным потенциалами можно установить, вообще говоря, различными способами. В одноосной среде выбор формул связи (калибровки) является вполне очевидным и зависит от ориентации вектора магнитного диполя. Тем не менее, при наличии различных способов калибровки возникают как минимум два вопроса: 1) является ли очевидный с физической точки зрения выбор способа калибровки действительно оптимальным с вычислительной точки зрения; 2) зависит ли электромагнитное поле, т.е. функции $\bar{E}$ и $\bar{H}$, от способа калибровки.

Рассмотрим анизотропную среду с анизотропией электрических и магнитных связей (квазистационарное синусоидальное электромагнитное поле). Исходная система уравнений имеет следующий вид:

$$rot\bar{H} = \tilde{\gamma}\bar{E} + \vec{p}\delta; \tag{1}$$

$$rot\bar{E} = -j\omega\tilde{\mu}_a\vec{H}, \tag{2}$$

где $\vec{p}$ – вектор плотности электрического тока (постоянный вектор); $\delta = f\left(x_2 y_2 z\right)$– дельта-функция.

В выбранной системе координат

$$\tilde{\gamma} = \begin{Vmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_z \end{Vmatrix}, \quad \tilde{\mu} = \begin{Vmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{Vmatrix},$$

где $\gamma \neq \gamma_z, \mu \neq \mu_z$.

Определим, согласно (2), индукцию $\vec{B} = \mu_a\vec{H}$ формулой $\vec{B} = rot\vec{A}$, где $\vec{A}$ – векторный магнитный потенциал. Тогда, согласно (1), $\bar{E} = -j\omega\vec{A} - \nabla\varphi$. Подставляя эти выражения, а также $\vec{H} = \tilde{\mu}_a^{-1} rot\bar{A}$ в (1), получим следующую систему уравнений:

$$\Delta_\mu A_x - j\omega\mu_0\mu_z\gamma A_x = \frac{\partial}{\partial x} div_\mu \vec{A} + \mu_0\mu_z\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \\ -\mu_0\mu_z p_x\delta, \tag{3}$$

$$\Delta_\mu A_y - j\omega\mu_0\mu_z\gamma A_y = \frac{\partial}{\partial y} div_\mu \vec{A} + \mu_0\mu_z\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \\ -\mu_0\mu_z p_y\delta, \tag{4}$$

$$\Delta_\mu A_z - j\omega\mu_0\mu\gamma_z A_z = \frac{\partial}{\partial z} div_\mu \vec{A} + \mu_0\mu\gamma_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \\ -\mu_0\mu_z p_z\delta, \tag{5}$$

где $\Delta_\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_\mu \frac{\partial}{\partial z^2}$;

$div_\mu \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \lambda_\mu \frac{\partial A_z}{\partial z}$; $\lambda_\mu = \frac{\mu_z}{\mu}$, p_x, p_y, p_z – компоненты постоянной вектора плотности тока в начале координат.

Рассмотрим сначала вариант вертикального диполя $p_x = p_y = 0$, $p_z \neq 0$. Тогда, полагая

$$\varphi = -\frac{1}{\mu_0 \mu_z \gamma} div_\mu \vec{A}, \qquad (6)$$

получим вместо (4), (5) два однородных уравнения (во всем пространстве), решения которых $A_x = A_y = 0$. Уравнение (5) с учетом (6) примет вид

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \lambda_\gamma \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - k_z^2 A_z = -\mu_0 \mu_z p_z \delta, \qquad (7)$$

где $k_z^2 = j\omega\mu_0\mu\gamma_z$; $\lambda_\gamma = \frac{\gamma_z}{\gamma}$.

После замены $z = z_1\sqrt{\lambda_\gamma}$ это уравнение приводится к известному уравнению Гельмгольца, решение которого после обратной замены $z_1 = z/\sqrt{\lambda_\gamma}$ дается формулой

$$A_z = \frac{\mu_0 \mu\, p_э}{4\pi} \frac{e^{-jk_z R_\gamma}}{R_\gamma}, \qquad (8)$$

где $p_э$ – момент электрического диполя с размерностью А·м; $R_\gamma = \sqrt{x^2 + y^2 + \lambda_\gamma^{-1} z^2}$.

Отметим, что приведенный способ калибровки не является единственным. Если положить

$$\varphi = -\frac{1}{\mu_0 \mu\, \gamma_z} div_\mu \vec{A}, \qquad (9)$$

то уравнение (5) примет вид

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \lambda_\mu \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - k_z^2 A_z = -\mu_0 \mu\, p_z \delta. \qquad (10)$$

После подстановки решения этого уравнения в (3), (4) и при использовании нормировки (9) получится система, состоящая из двух уравнений относительно A_x, A_y, в правых частях которой появятся производные решения (10) (известные функции). Однако такой способ решения, очевидно, лишен практического смысла, поскольку электромагнитное поле будет выражаться через три компоненты векторного потенциала, в то время как в первом способе достаточно одной компоненты A_z, с помощью которой легко определяется магнитное поле, имеющее только азимутальную составляющую, а через него с использованием (1) – электрическое.

Рассмотрим теперь вариант диполя с моментом $p_x \neq 0$, $p_y = p_z = 0$ (горизонтальный диполь). После использования нормировки (6) уравнения (3) и (4) приведем к виду

$$\Delta_\mu A_x - k_x^2 A_x = -\mu_0 \mu_z p_x \delta, \qquad (11)$$

$$\Delta_\mu A_y - k_x^2 A_y = 0, \qquad (12)$$

где $k_x^2 = j\omega\mu_0\mu_z\gamma$.

Последнее уравнение (5) переходит в следующее:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \lambda_\gamma \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - k_z^2 A_z = (1-\lambda)\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x}, \qquad (13)$$

где $\lambda = \frac{\mu\gamma_z}{\mu_z\gamma}$; $k_z^2 = j\omega\mu_0\mu\gamma_z$.

Чтобы решить это уравнение, используем спектральный метод [1]. Прямое и обратное преобразование Фурье векторного потенциала представим в виде

$$\dot{\vec{A}}(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \vec{A}(x,y,z) e^{-j(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})} dx dy dz, \qquad (14)$$

$$\vec{A}(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \dot{\vec{A}}(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) e^{j(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})} d\dot{x} d\dot{y} d\dot{z}, \qquad (15)$$

Используя формулу (15), подставим составляющую A_x векторного потенциала в (7) и получим

$$\dot{A}_x = \frac{\mu_0 \mu_z p_э}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \lambda_\gamma \cdot \dot{z}^2 + k_x^2},$$

где $p_э$ – момент электрического диполя с размерностью А·м.

Тогда из уравнения (12) следует

$$\dot{A}_z = \frac{\mu_0 \mu_z p_э (1-\lambda)\dot{x}\dot{z}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \lambda_\gamma \dot{z} + k_z^2\right)\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \lambda_\mu \dot{z} + k_x^2\right)}. \qquad (16)$$

Подставляя это выражение в (14), получаем решение (12) в виде

$$A_z = \frac{\mu_0 \mu_z p_э (1-\lambda)}{(2\pi)^3} \times$$

$$\times \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\dot{x}\dot{z} e^{j(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \lambda_\gamma \dot{z} + k_z^2\right)\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \lambda_\mu \dot{z} + k_x^2\right)} d\dot{x} d\dot{y} d\dot{z}. \qquad (17)$$

Интеграл по $\dot{z}$ в этой формуле вычислим с помощью теории вычетов [3]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{z} e^{jz\dot{z}}}{\left(\dot{x} + \dot{y}^2 + \lambda_\gamma \dot{z}^2 + k_z^2\right)\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \lambda_\mu \dot{z} + k_x^2\right)} d\dot{z} =$$

$$= \frac{\pi j}{\lambda_\mu (1-\lambda)} sign(z) \left(\frac{e^{-\alpha_x |z|}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \frac{e^{-\alpha_z |z|}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right),$$

где $\alpha_x = \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\lambda_\mu} + k^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\alpha_z = \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\lambda_\gamma} + k^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

$k^2 = j\omega\mu_0\mu\,\gamma$.

Далее нужно вычислить двойной интеграл вида

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\dot{x} e^{j(x\dot{x}+y\dot{y})} e^{-\alpha_x |z|}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)} - \frac{\dot{x} e^{j(x\dot{x}+y\dot{y})} e^{-\alpha_z |z|}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)} d\dot{x} d\dot{y}. \qquad (18)$$

После замены декартовых координат цилиндрическими $\dot{r}, \dot{\alpha}$ и использования формулы [4]

$$e^{jr\dot{r}\cos(\alpha-\dot{\alpha})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n e^{jn(\alpha-\dot{\alpha})} J_n(r\dot{r}),$$

где $J(r\dot{r})$ – функция Бесселя порядка n, интеграл (17) дает следующее окончательное решение для A_z:

$$A_z = \frac{\mu_0 \mu p_э}{4\pi} \frac{\cos\alpha}{r} z \left(\frac{e^{-k\sqrt{\lambda_\mu r^2 + z^2}}}{\sqrt{\lambda_\mu r^2 + z^2}} - \frac{e^{-k\sqrt{\lambda_\gamma r^2 + z^2}}}{\sqrt{\lambda_\gamma r^2 + z^2}} \right), \quad (19)$$

где μ – составляющая тензора магнитной проницаемости по оси x (или y); $p_э$ – момент электрического диполя; $\lambda_\gamma = \gamma_z/\gamma$, $\lambda_\mu = \mu_z/\mu$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\cos\alpha = x/r$.

При $\lambda_\mu = 1$, т.е. для однородной в магнитном отношении среды, формула (19) совпадает с выражением, полученным в [5], где оно выведено методом разделения переменных Фурье, причем исходное представление для векторного потенциала введено, по сути, эвристически. Кроме того, при таком подходе возникает необходимость дополнительной процедуры по вычислению момента диполя, что отмечается как недостаток в [6]. Использованный метод, основанный на преобразованиях Фурье (14), (15), не требует дополнительных процедур и сразу дает готовое решение. Кроме того, такой подход позволяет, что более существенно, сравнительно просто проанализировать различные способы нормировки. В частности, в данном случае (горизонтального диполя) возможен вариант нормировки следующего типа:

$$\varphi = -\frac{1}{\mu_0 \mu \gamma_z} div_\mu \vec{A}. \quad (20)$$

Уравнение (5) после этого приобретает вид

$$\Delta_\mu A_z - k_z^2 A_z = 0. \quad (21)$$

Решение этого уравнения, очевидно, равно нулю. Из (4), (5) с использованием (20) возникает следующая система:

$$\lambda \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \lambda_\mu \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + (\lambda - 1)\frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} - k_x^2 A_x = -\mu_0 \mu_z p_x \delta, \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \lambda_\mu \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} + (\lambda - 1)\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} - k_x^2 A_y = 0. \quad (23)$$

Решение этой системы дает две ненулевые компоненты A_x, A_y. Обозначим ненулевые компоненты потенциалов в задаче о горизонтальном диполе: для первого варианта решения – A_x^1, A_z^1, φ^1, для второго – A_x^2, A_y^2, φ^2. Выпишем выражения для составляющих векторов поля в обоих вариантах:

$$E_x^1 = -j\omega A_x^1 - \frac{\partial \varphi^1}{\partial x};$$

$$E_y^1 = -\frac{\partial \varphi^1}{\partial y};$$

$$E_z^1 = -j\omega A_z^1 - \frac{\partial \varphi^1}{\partial z};$$

$$B_x^1 = \frac{\partial A_z^1}{\partial y}; \quad B_y^1 = \frac{\partial A_x^1}{\partial z} - \frac{\partial A_z^1}{\partial x}; \quad B_z^1 = -\frac{\partial A_x^1}{\partial y}.$$

$$E_x^2 = -j\omega A_x^2 - \frac{\partial \varphi^2}{\partial x};$$

$$E_y^2 = -j\omega A_y^2 - \frac{\partial \varphi^2}{\partial y};$$

$$E_z^2 = -\frac{\partial \varphi^2}{\partial z};$$

$$B_x^2 = -\frac{\partial A_y^2}{\partial z}; \quad B_y^2 = \frac{\partial A_x^2}{\partial z}; \quad B_z^2 = \frac{\partial A_y^2}{\partial x} - \frac{\partial A_x^2}{\partial y},$$

$$\varphi^1 = -\frac{1}{\mu_0 \mu_z \gamma} div_\mu \vec{A}^1, \quad \varphi^2 = -\frac{1}{\mu_0 \mu \gamma_z} div_\mu \vec{A}^2.$$

По форме записи эти выражения существенно различаются. Тем не менее они представляют одно и то же решение, т.е. $\vec{E}^1 = \vec{E}^2 = \vec{E}$, $\vec{B}^1 = \vec{B}^2 = \vec{B}$. Это можно показать, используя данные выражения как представления для произвольных векторов. Если, например, взять ротор от вектора $\vec{E}^1$, то, согласно формулам, для вектора $\vec{B}^1$ получим уравнение (2). Если же взять ротор от вектора $\vec{H}^1 = \mu_0 \tilde{\mu}^{-1} \vec{B}^1$, то при условии, что уравнения (11), (13) выполняются, получим формулы для вектора $\tilde{\gamma}\vec{E}^1$, т.е. придем к системе уравнений Максвелла (однородность этих уравнений в данном случае принципиального значения не имеет). То же самое можно проделать и с формулами для векторов $\vec{E}^2$, $\vec{B}^2$, т.е. снова получить уравнения Максвелла. Поскольку, как известно, решения уравнений Максвелла единственны, равносильны будут и два рассмотренные способа нормировки.

В заключение отметим, что полученные выражения для векторных потенциалов являются в некоторой степени универсальными. В частности, полагая $\mu = \mu_z$ (однородная магнитная среда) и заменяя действительный тензор $\tilde{\gamma}$ на комплексный $\tilde{\gamma} + j\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}$, можно получить выражения для векторных потенциалов в анизотропной диэлектрической среде с потерями [6].

Поскольку полученное выражение для векторного потенциала является довольно простым, с его помощью легко можно найти выражения для векторов электромагнитного поля диполя, которые являются, как известно, фундаментальными решениями уравнений Максвелла, имеющими практическое значение [7].

Список литературы

1. **Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.** Возбуждение электромагнитных волн. – М.: Радио и связь, 1983.
2. **Чирков А.Г., Агеев А.Н.** О природе эффекта Ааронова-Бома // Журнал технической физики. – 2001. – Т.1. – Вып. 2. – С. 16–22.
3. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965.
4. **Лебедев Н.Н.** Специальные функции и их приложения. – М.: ГИФМЛ, 1963.
5. **Кауфман А.А., Качанский А.М.** Индукционный метод изучения поперечного сопротивления в скважинах. – Новосибирск: Наука, 1972.
6. **Савченко А.О., Савченко О.Я.** Электромагнитное поле диполя в анизотропной среде // Журнал технической физики. – 2005. – Т.75. – Вып.10. – С. 118–121.
7. **Тозони О.В., Маергойз И.Д.** Расчет переменных электромагнитных полей. – Киев: Техника, 1975.

Кадников Сергей Николаевич,
Ивановский государственный энергетический университет,
доктор технических наук, профессор кафедры теоретической электротехники и электротехнологии,
e-mail: kadnikovsn@mail.ru

Веселова Ирина Евгеньевна,
Ивановский государственный энергетический университет имени Ленина,
ассистент кафедры высшей математики,
e-mail: iveselova@math.ispu.ru