

УДК 621.18.021

К теории флуктуаций роста трещин в теплоэнергетическом оборудовании ТЭС и АЭС

Семенов В.К., д-р техн. наук, Беляков А.А., асп., Щебнев В.С., канд. техн. наук.

Предлагается стохастическая математическая модель роста трещин в теплоэнергетическом оборудовании, основанная на уравнении Фоккера-Планка и полуэмпирическом уравнении роста средней длины трещины.

Ключевые слова: стохастическая модель, рост трещины, прогнозирование.

To the theory of fluctuations of growth of cracks in heat power equipment heat power plant and the atomic power station

Semenov V.K., doctor of science, Belyakov A.A. post-graduate student, Shhebnev V.S., candidate of science

In work the stochastic mathematical model of growth of cracks in the heat power equipment is offered. The model is based on the Fokker-Planck equation and the semiempirical equation of growth of average length of a crack.

Keywords: stochastic model, crack growth, forecasting.

Оборудование ТЭС и АЭС работает под постоянным воздействием изменяющейся температуры, давления, циклических нагрузок и пр. Такие условия работы приводят к накоплению в материале оборудования значительных повреждений и развитию макроскопических трещин. Нередко зародыши трещин находятся в материале еще до ввода его в эксплуатацию [1].

Растрескивание стенок теплообменных трубок и других элементов оборудования определяется целым комплексом условий (накопление продуктов коррозии, тепловые и динамические режимы работы, механические воздействия и пр.), многие из которых являются неконтролируемыми. Следовательно, на процесс накопления дефектов следует смотреть как на стохастический и исходить из вероятностных представлений. Многие из величин можно считать определенными, детерминированными, тогда как сам процесс роста трещины – случайный и длина трещины – случайная величина, изменяющаяся во времени непрерывным образом. Причем если интервал времени мал, то и изменение длины трещины тоже мало, т.е. за малое время наиболее вероятны переходы, в результате которых длина трещины изменяется незначительно, а большие изменения длины трещины маловероятны. В таких условиях эволюцию системы можно рассматривать как непрерывный стохастический процесс марковского типа [2]. Это означает, что вероятность перехода системы из одного состояния (начального) в другое (конечное) зависит только от начального состояния и не зависит от тех состояний, которые предшествовали начальному. Последнее предположение является весьма общим и, хотя вначале не может быть доказано, получает обоснование в дальнейшем. Так, будет показано, что уравнения, описывающие кинетику роста тре-

щины на детерминированном уровне, являются по существу следствием сделанного допущения.

Статистическое описание роста трещины будем осуществлять заданием функции распределения вероятностей $\rho(l,t)$, причем $\rho(l,t)dl$ представляет собой вероятность того, что данный элемент имеет трещину, длина которой находится в интервале от l до $l + dl$. Рассматриваемый нами стохастический процесс является непрерывным по обеим переменным t и l . Такие стохастические процессы подчиняются уравнению Фоккера-Планка [2]

$$\frac{\partial \rho(l,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial l} [A(l)\rho(l,t)] + \frac{\partial^2}{\partial l^2} [B(l)\rho(l,t)]. \quad (1)$$

Кинетические коэффициенты $A(l)$ и $B(l)$ соответственно представляют собой среднее и среднеквадратичное изменение длины трещины за единицу времени:

$$A(l) = \int_0^{\infty} q\omega(l,q)dq, \quad B(l) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} q^2\omega(l,q)dq.$$

Здесь q – длина зоны пластической деформации, возникающей перед вершиной трещины; $\omega(l,q)dq$ – вероятность изменения длины трещины в интервале от l до $l + q$ за единицу времени. Как известно [1], рост трещины связан с развитием зоны пластической деформации перед вершиной трещины, причем $q/l \ll 1$. Этот процесс носит пороговый характер, т.е. величина q должна быть больше или равна некоторому минимальному значению δ . Согласно сделанным предположениям, функция $\omega(l,q)$ быстро убывает с увеличением q , так что основную роль играют малые значения q , т.е. δ . Так как $\delta > 0$, то рассматриваемый нами стохастический процесс является процессом чистого рождения. В этом случае кинетические коэффициенты связаны простым соотношением $B(l) = \frac{1}{2} \delta A(l)$. Учи-

тывая, что δ является единственным геометрическим параметром задачи развития трещины в бесконечной среде, длину l будем измерять в безразмерных единицах l/δ . При такой нормировке коэффициент $A(l)$ в уравнении Фоккера-Планка умножится на $1/\delta$, а коэффициент $B(l)$ – на $1/\delta^2$. Нормированные таким образом коэффициенты будут связаны соотношением $B(l) = \frac{1}{2} A(l)$. Чтобы не вводить новых обозначений, далее сохраним за l , A и B старые обозначения.

Как правило, кинетические коэффициенты нелинейно зависят от длины трещины, поэтому решение уравнения Фоккера-Планка можно найти только численными методами при помощи вычислительной техники. Между тем для практики часто достаточно знать, как ведут себя средние длины трещин и их флуктуации. Для знания этих величин не требуется определения явного вида функции распределения.

Сначала найдем уравнение для средней длины трещины. При этом анализ проведем в общем виде, считая коэффициенты A и B разными. С этой целью умножим левую и правую части уравнения (1) на l и проинтегрируем по всевозможным значениям длины трещины от l_0 до ∞ . Имея в виду, что при $l = l_0$ и $l = \infty$ функция распределения $\rho(l, t) = 0$, после несложных преобразований получим

$$\left(\frac{d \langle l \rangle}{dt} \right)_{l_0} = (\langle A(l) \rangle)_{l_0}. \quad (2)$$

Индекс l_0 означает, что усреднение ведется при фиксированном значении начальной длины трещины. Усредняя по начальным длинам, получим уравнение

$$\frac{d \langle l \rangle}{dt} = \langle A(l) \rangle. \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет очевидный физический смысл: скорость роста трещины определяется средней скоростью потока роста трещин. Однако для того, чтобы им воспользоваться, нужно перейти от среднего потока к потоку от среднего. Для этого разложим $A(l)$ в ряд Тейлора вблизи $\langle l \rangle$:

$$A(l) \approx A(\langle l \rangle) + \frac{dA(\langle l \rangle)}{dl} (l - \langle l \rangle) + \frac{1}{2} \frac{d^2 A(\langle l \rangle)}{dl^2} (l - \langle l \rangle)^2. \quad (4)$$

Усредняя по l , получим

$$A(l) \approx A(\langle l \rangle) + \frac{1}{2} \frac{d^2 A(\langle l \rangle)}{dl^2} \Delta. \quad (5)$$

При малой дисперсии распределения $\Delta = \langle (l - \langle l \rangle)^2 \rangle \ll \langle l^2 \rangle$ вторым слагаемым можно пренебречь:

$$\frac{d \langle l \rangle}{dt} \approx A(\langle l \rangle). \quad (6)$$

На детерминированном уровне описания именно это уравнение должно лежать в основе всех теорий роста трещин в аппаратуре. Заметим,

что в случае линейной зависимости $A(l)$ это уравнение становится точным.

Выведем теперь уравнение для дисперсии распределения:

$$\Delta = \langle (l - \langle l \rangle)^2 \rangle = \langle l^2 \rangle - \langle l \rangle^2. \quad (7)$$

Из уравнения (3) имеем

$$\frac{d \langle l \rangle^2}{dt} = 2 \langle l \rangle A(l). \quad (8)$$

Умножая все члены уравнения (1) на l^2 и интегрируя по l , с учетом (7) и (8) получим

$$\frac{d \Delta}{dt} = 2 [\langle l A(l) \rangle - \langle l \rangle \langle A(l) \rangle] + 2 \langle B(l) \rangle. \quad (9)$$

Раскладывая $\langle l A(l) \rangle$ в ряд Тейлора и усредняя по l , найдем

$$\langle l A(l) \rangle = \langle l \rangle A(\langle l \rangle) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dl^2} [l A(l)]_{l=\langle l \rangle} \cdot \Delta. \quad (10)$$

С учетом (5) и (9) уравнение для дисперсии распределения запишется в виде

$$\frac{d \Delta}{dt} = 2 \left(\frac{d A}{dl} \right)_{N=\langle l \rangle} \cdot \Delta + 2 B(\langle l \rangle). \quad (11)$$

Если $A(\langle l \rangle)$, $B(\langle l \rangle)$ явно от времени не зависят (или зависят одинаковым образом), то вместо времени t можно ввести новую переменную:

$$\frac{d \Delta}{d \langle l \rangle} = \Delta \frac{d}{d \langle l \rangle} \left[\ln A^2(\langle l \rangle) \right] + 2 \frac{B(\langle l \rangle)}{A(\langle l \rangle)}. \quad (12)$$

Полученное уравнение является линейным и интегрируется в квадратурах:

$$\Delta = \frac{A^2(\langle l \rangle)}{A^2(\langle l_0 \rangle)} \left[\Delta_0 + A^2(l_0) \int_{\langle l_0 \rangle}^{\langle l \rangle} \frac{dl}{A^2(l)} \right]. \quad (13)$$

Здесь учтено, что в принятых переменных $B(l) = \frac{1}{2} A(l)$. Аналогичным образом можно найти уравнения для последующих моментов распределения.

Различные полуэмпирические уравнения роста трещин (уравнения Пэриса, Эрдогана-Формана и др.) основаны на теории Гриффитса, в основу которой положен закон сохранения энергии. Энергия, необходимая для развития трещины, равна энергии упругости, заключенной в объеме трещины. Уравнения роста трещин в бесконечной среде при непрерывной и циклической нагрузке можно записать в следующем виде [1]:

$$\frac{d \langle l \rangle}{dt} = \alpha \frac{\sigma^m}{K_c} \langle l \rangle^{m/2}, \quad (14)$$

$$\frac{d \langle l \rangle}{dt} = \beta \frac{(\Delta \sigma)^m}{K_c \cdot \tau} \langle l \rangle^{m/2}. \quad (15)$$

Здесь α и β – эмпирические коэффициенты пропорциональности, учитывающие геометрию элемента и внешние условия; σ – напряжение в материале; $K_c = \sqrt{2\gamma E}$ – критический коэффициент интенсивности напряжений, при котором распространение трещины происходило бы со скоростью упругой волны $\sim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$; E – модуль Юнга; γ – удель-

ная энергия пластического деформирования; τ – продолжительность цикла. Как показали эксперименты, эмпирический коэффициент m для большинства материалов и сплавов может принимать значения от 2 до 6 [1]. В частности, для углеродистых сталей $m = 4$.

В реальности трещина не может быть бесконечной – область ее возможной протяженности ограничена размером повышенной нагруженности (сварные швы, гибы, места вальцовки, характерный размер изделия). Кроме того, материал стареет, в нем накапливаются скрытые кумулятивные эффекты. С учетом этих обстоятельств уравнение роста трещины перепишем в виде

$$\frac{dl^*}{dt} = \alpha(t)(1-l^*)^n \quad (16)$$

Здесь $l^* = l/L$ – новая переменная; L – предельная длина трещины; $n = m/2$; $\alpha(t)$ – эмпирический коэффициент, учитывающий указанные выше свойства материала, условия эксплуатации и его старение:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots \quad (17)$$

Входящие в (17) коэффициенты должны определяться на основе регрессионного анализа результатов натурного эксперимента.

Для $n = 1$ рост средней длины трещины определяется экспоненциальным законом

$$l^*(t) = 1 - \exp(-\lambda(t)) \quad (18)$$

Для $n > 1$ рост трещины происходит по закону

$$l^*(t) = 1 - \frac{1}{[1 + (n-1)\lambda(t)]^{1/(n-1)}} \quad (19)$$

Здесь принято обозначение $\lambda(t) = \int_0^t \alpha(t) dt$.

С учетом (16) дисперсия распределения определяется выражением

$$D = \frac{\Delta p}{\delta L} = \frac{1}{2n-1} (1-l^*) \left[1 - (1-l^*)^{(2n-1)} \right] \quad (20)$$

Здесь Δp – размерная дисперсия, а D – безразмерная величина.

На рис. 1, 2 представлены графики зависимостей дисперсии распределения от длины трещины при различных значениях числа n .

Анализ графиков показывает, что с ростом числа n максимум дисперсии сдвигается влево, а дисперсия в максимуме уменьшается.

В качестве примера на рис. 3 приведена кривая прогноза роста трещины из тепловой канавки ротора турбины, изготовленного ПО ЛМЗ из стали Р2 [3], при циклической нагрузке. Коэффициенты идентификации функции прогноза определены на основе регрессионного анализа экспериментальных данных по методу наименьших квадратов. Предельная длина трещины составляет 150 мм, а время измерено сотнями циклов.

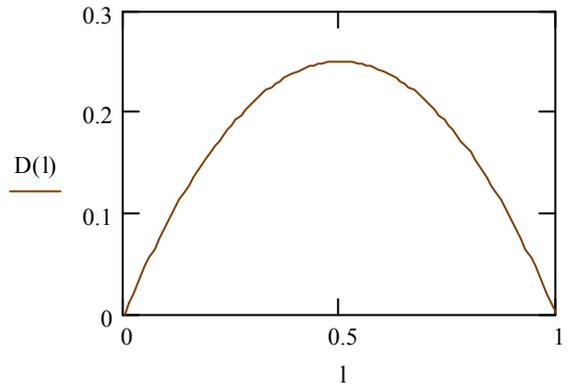


Рис. 1. Зависимость дисперсии распределения $D = \Delta\delta/L$ от длины трещины при $n = 1$

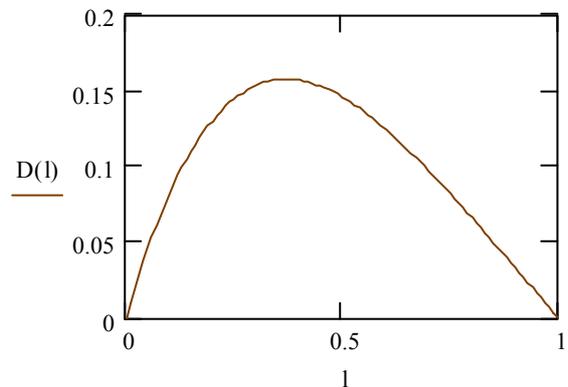


Рис. 2. Зависимость дисперсии распределения $D = \Delta\delta/L$ от длины трещины при $n = 2$

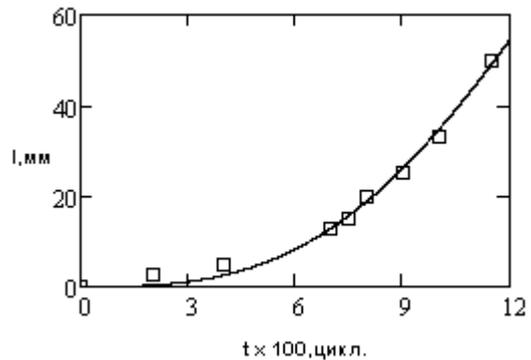


Рис. 3. Функция прогноза роста трещины из тепловой канавки ротора турбины: $\square\square\square$ – данные эксперимента; — – функция прогноза

Итак, на основании уравнений (6) и (13) можно спрогнозировать среднюю длину трещины, ее флуктуацию $\sqrt{\Delta}$ и время достижения данного состояния:

$$l(t) \approx \langle l(t) \rangle \pm \sqrt{\Delta(t)}$$

Список литературы

1. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984.

2. **Либов Р.** Введение в теорию кинетических уравнений. – М.: Мир, 1974.

3. **Израилов Ю.Л.** Основы теории живучести турбин. Рекомендации и опыт реализации. – М.: Мин-во энергетики и электрификации СССР, 1991.

Семенов Владимир Константинович,
Ивановский государственный энергетический университет,
доктор технических наук, профессор кафедры атомных электростанций,
телефон (4932) 385-778.

Беляков Андрей Александрович,
Ивановский государственный энергетический университет,
аспирант кафедры атомных электростанций.

Щебнев Владимир Сергеевич,
Ивановский государственный энергетический университет,
кандидат технических наук, заведующий кафедрой атомных электростанций,
телефон (4932) 385-778.